Modulo 4 ACT. Tema 6:

Trigonometría

INDICE

INTRODUCCIÓN 2
1. CONCEPTOS PREVIOS. 2
1.1 Figuras Semejantes 2
1.2 Clasificación de los ángulos 4
1.3 Triángulos 5
1.4 Ángulos y su medida 7
1.5 Grados sexagesimales 7
1.6 Sistema Internacional (SI) 7
1.7 Paso de Radianes a Grados y de Grados a Radianes 8
2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS 9
2.1 Razones trigonométricas en ángulos agudos 9
2.2 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera 10
2.3 Propiedades de las razones trigonométricas 14
2.4 Funciones trigonométricas inversas (función arco). 14
3. APLICACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS 15
3.1 Resolución de triángulos rectángulos 15
3.2 Resolución de problemas cotidianos 16
4. EJERCICIOS 17

INTRODUCCIÓN

Aunque la palabra trigonometría significa literalmente la medida de los triángulos, en realidad es una parte de las matemáticas que surge del estudio de la semejanza geométrica entre figuras planas y, en la práctica, sirve para calcular distancias a partir de la medida de ángulos. De este modo se puede medir, por ejemplo, la distancia de las estrellas a nuestro planeta sin necesidad de tener que viajar hasta ellas.

Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas del 1.800 a.C. con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que serían imposibles de obtener por medición directa.

En este tema estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.

Imagen 1. Tabla babilónica.
https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa#/media/File:Plimpton_322.jpg
Autor: Desconocido Licencia: Creative Commons

1. CONCEPTOS PREVIOS.

1.1 Figuras Semejantes

Intuitivamente solemos decir que dos **figuras son semejantes** si tienen la misma forma pero distinto tamaño. Para ello tienen que tener igualdad de los ángulos correspondientes y la misma razón entre lados correspondientes.

La semejanza geométrica queda plenamente reflejada en el ***teorema de Thales***, según el cual "cuando varias rectas paralelas son cortadas

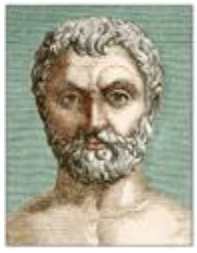
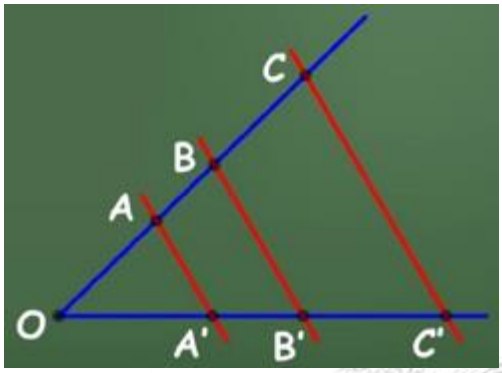


Imagen 2.
Thales de Mileto

por dos rectas secantes, los segmentos que determinan en una de las secantes son proporcionales a los segmentos que determinan en la otra secante".



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

Aunque también:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

¡INTÉNTALO TU MISMO!

Thales de Mileto

Cuenta la historia que un sacerdote egipcio le preguntó a Tales de Mileto (s. IV a. C) acerca de la altura de la Pirámide de Keops, cuando ya las pirámides rondaban los 2.000 años de edad, y éste respondió con un método de lo más ingenioso para medir dicha altura.

La historia dice así:

«Un sacerdote egipcio le pregunta sonriendo cuál puede ser la altura de la pirámide del rey Khufu (la pirámide de Keops). Tales reflexiona y a continuación contesta que no se conforma con calcularla a ojo, sino que la medirá sin ayuda de ningún instrumento. Se echa sobre la arena y determina la longitud de su propio cuerpo.

Los sacerdotes le preguntan qué es lo que está pensando, y Tales les explica: «Me pondré simplemente en un extremo de esta línea, que mide la longitud de mi cuerpo, y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide de vuestro Khufu también ha de medir tantos pasos como la altura de la pirámide.»

El sacerdote, desorientado por la extrema sencillez de la solución, se pregunta si acaso no hay algún error, algún sofisma, Tales añade: «Pero si queréis que os mida esa altura, a cualquier hora, clavaré en la arena mi bastón.»

¿Cómo es capaz Thales de medir la altura de la pirámide de Keops? Discute tus ideas con tus compañeros y registra sus conclusiones.

La sombra de la pirámide mide 280 metros, la sombra del bastón mide 2,87 metros y el bastón mide 1,5 metros. ¿De cuánto es la altura de la pirámide?

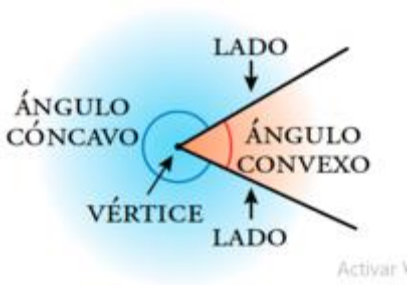
Visualización del efecto de la sombra sobre la pirámide:

https://www.geogebra.org/m/bgdku9ta

1.2 Clasificación de los ángulos

Un par de semirrectas con origen común delimitan dos ángulos: uno convexo (en rojo) y otro cóncavo (en azul).

Las semirrectas se llaman lados del ángulo, y el punto común, vértice.



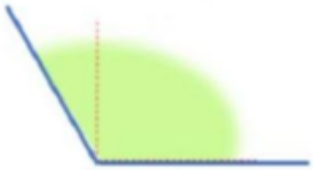
ÁNGULO RECTO

Miden exactamente 90 grados

ÁNGULO AGUDO

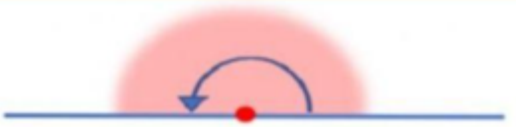
Son menores a 90 grados

ÁNGULO OBTUSO



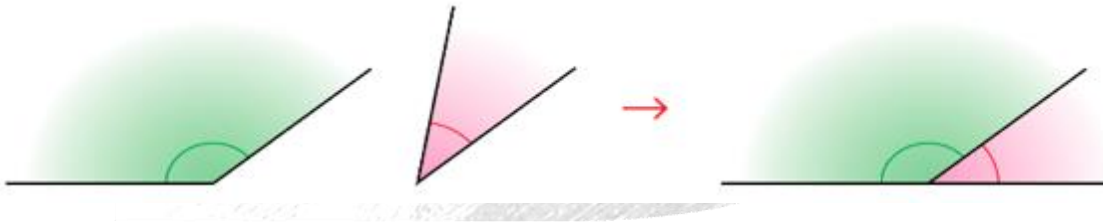
Miden entre 90 y 180 grados

ÁNGULO LLANO



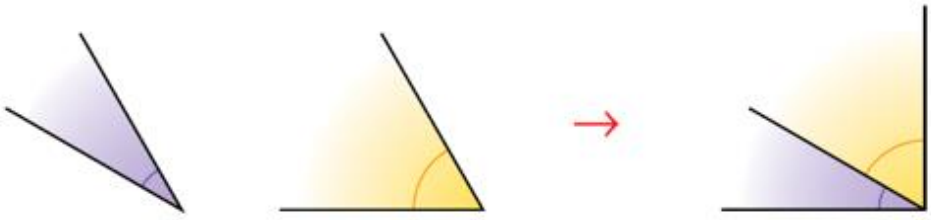
Miden exactamente 180 grados

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS



Si su suma es un ángulo llano.

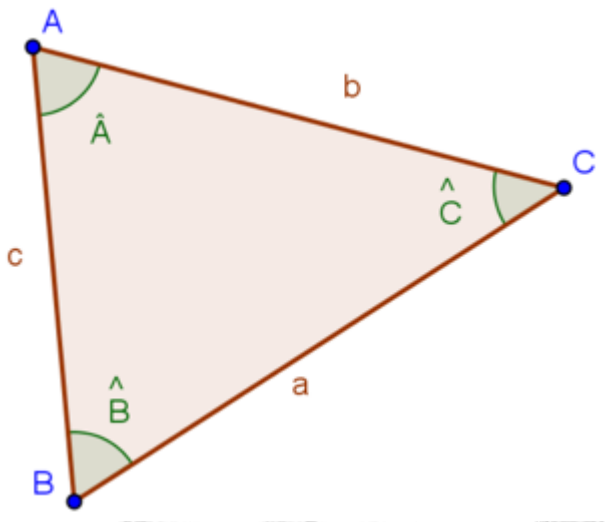
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



Si su suma es un ángulo recto.

1.3 Triángulos

En un triángulo, los vértices se nombran con letras mayúsculas (A, B y C). Los lados se nombran con la letra minúscula del vértice opuesto al lado (a, b, c). Los ángulos se nombran con el acento circunflejo encima de la letra mayúscula que denota el vértice del ángulo (Â). Observa el siguiente dibujo donde te quedará más claro la nomenclatura de los triángulos:



Los 3 ángulos de un triángulo siempre suman 180°.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Imagen 3. Cómo se nombra un triángulo.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

En un **triángulo rectángulo**, al ángulo recto se le asigna la letra A y así, a la hipotenusa la letra a minúscula, siendo b y c los dos catetos. Se utilizan las letras griegas α y β para nombrar a los ángulos agudos que no corresponden al de 90° respectivamente.

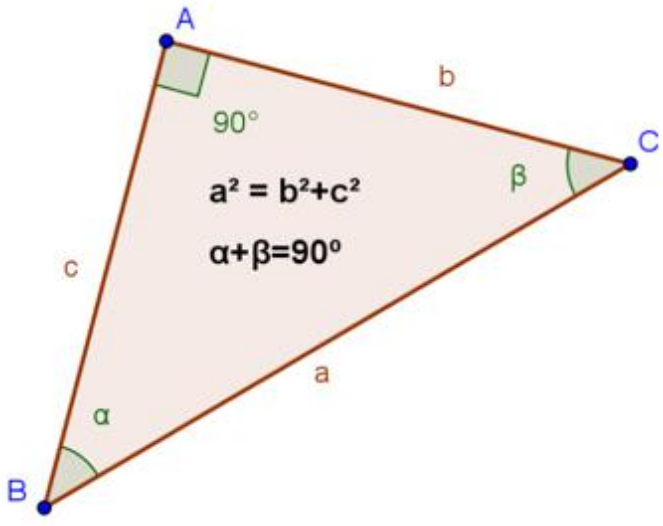


Imagen 4. Cómo se nombra un triángulo.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

También se cumple que los dos ángulos agudos son complementarios, es decir, se cumple que (α + β = 90°).

En un triángulo rectángulo se verifica el **teorema de Pitágoras** (El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $a^2 = b^2 + c^2$).

Pincha en la imagen!!

Clasificación de triángulos:

1.4 Ángulos y su medida

Consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio la unidad.

El punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será POSITIVO y si es igual, NEGATIVO.

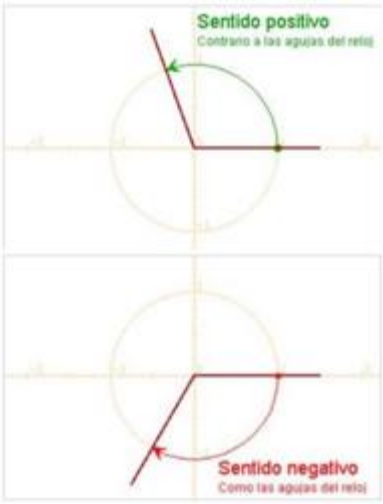


Imagen 5. Sentidos de los ángulos. https://trigonometriaaplicada.wordpress.com/angulos-medidas-y-aplicaciones/

1.5 Grados sexagesimales

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos. Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos. Así un ángulo se mide en:

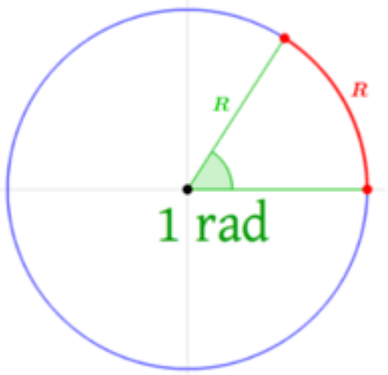
grados ° minutos' segundos" →

UNA VUELTA COMPLETA= 360°; 1° = 60' y 1' = 60"

1.6 Sistema Internacional (SI)

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia. Como la longitud de toda la circunferencia es 2·π· radio, resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el radián. El radián es un ángulo tal que, cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad.



A un ángulo completo le corresponde un arco de longitud 2πR, a un radián un arco de longitud R, entonces:

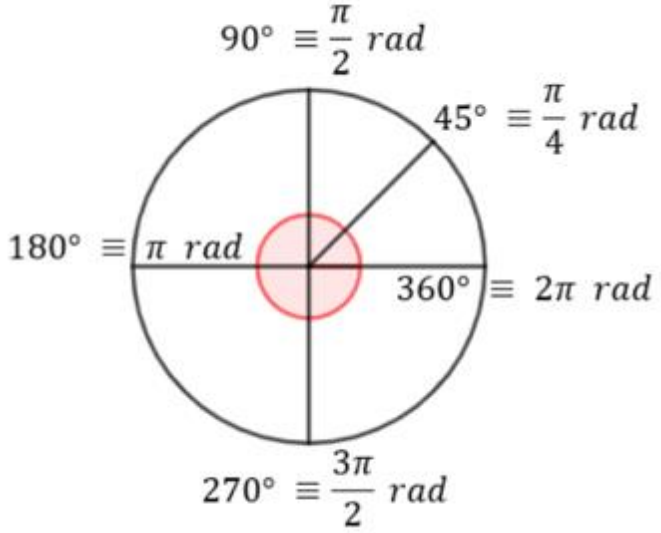
Nº de radianes de un ángulo completo= 360º = 2π rad

1.7 Paso de Radianes a Grados y de Grados a Radianes

Estamos acostumbrados a trabajar con **grados sexagesimales (°),** es decir, un ángulo recto son 90°, un ángulo llano 180° y un ángulo completo 360°. Pero según el **SI**, la unidad para la medida de ángulos son los **radianes**. La equivalencia es la siguiente:

- Un ángulo recto (90°) son π/2 rad
- Un ángulo llano (180°) son π rad
- Un ángulo completo (360°) son 2π rad.

Visualmente la equivalencia entre grados y radianes es la de la imagen siguiente. A partir de ahí se pueden convertir cualquier grado a radianes aplicando una regla de tres.



Únicamente debemos tener presente que:

$$1\ grado = \frac{\pi}{180}\ radianes$$

$$1\ radián = \frac{180}{\pi}\ grados$$

De grados a radianes: Multiplicamos por $\frac{\pi}{180}$

De radianes a grados: Multiplicamos por $\frac{180}{\pi}$

Además, existe otro sistema de medidas de ángulos, menos utilizada, llamado grado centesimal, donde una vuelta completa son 400 g (gonios).

¡Importante!

En las calculadoras usuales suelen aparecer cuatro tipos de medida de ángulos:

- "DEG" o expresión en grados sexagesimales;
- la tecla < º ' " > da los grados enteros del ángulo y la parte decimal se cuenta en minutos (1/60 de grado) y segundos (1/60 de minuto).
- "RAD" es decir, radianes.
- "GRAD" cada grado centesimal es la centésima parte del ángulo recto, toda la circunferencia está formada por 400 grados centesimales. 1GRAD=90/100 DEG

DEBES TENER MUCHO CUIDADO PORQUE SEGÚN EN QUÉ MODO TENGAS TU CALCULADORA LOS CÁLCULOS TE LOS HARÁ CORRECTAMENTE O NO EN LAS UNIDADES QUE NECESITES.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Partiendo de las ideas anteriores, si se construyen varios triángulos rectángulos que compartan las rectas que soportan la hipotenusa y uno de los catetos, resultarán triángulos semejantes en los que los catetos opuestos al vértice común están contenidos en rectas paralelas entre sí y al aplicar el teorema de Thales, la razón de proporcionalidad entre segmentos correspondientes sería así:

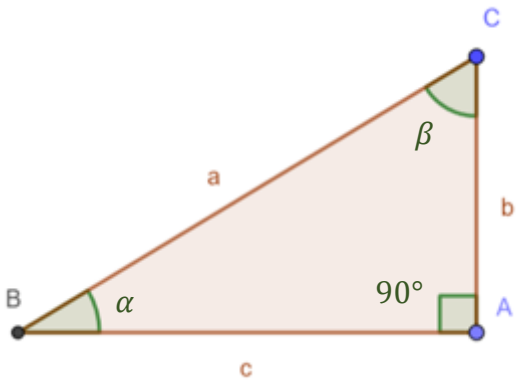
Esta proporcionalidad está indicando que la razón entre el "cateto contiguo al ángulo α" y la hipotenusa es la misma para toda la serie de triángulos rectángulos semejantes.

La ventaja de asociar al ángulo el valor de la razón de proporcionalidad en triángulos rectángulos (y no de otro tipo) es que son más fáciles de dibujar (pues tienen un ángulo de 90°) y además cumplen el teorema de Pitágoras (el cuadrado de la hipotenusa coincide con la suma de los cuadrados de los catetos).

De igual modo se podrían establecer otras razones de proporcionalidad en la serie de triángulos rectángulos, como la razón entre el "cateto opuesto al ángulo α" y la hipotenusa, o entre el "cateto opuesto al ángulo α" y el "cateto contiguo al ángulo α". Todas ellas dependerían sólo del ángulo y, al revés, si se conoce el valor de la razón, pueden dibujarse triángulos rectángulos que sólo pueden tener este ángulo. A todo este tipo de razones de proporcionalidad se las conoce como **razones trigonométricas** de este ángulo.

2.1 Razones trigonométricas en ángulos agudos

Utilizando triángulos rectángulos pueden definirse las siguientes razones trigonométricas para ángulos agudos (menores de 90°):



$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$cos(\alpha) = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{contiguo} = \frac{b}{c}$$

Los valores para algunos de los ángulos más característicos son los siguientes:

Ángulo (α)	0°	30°	45°	60°	90°
sen (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos (α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg (α)	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	∞

¡TRUCO!

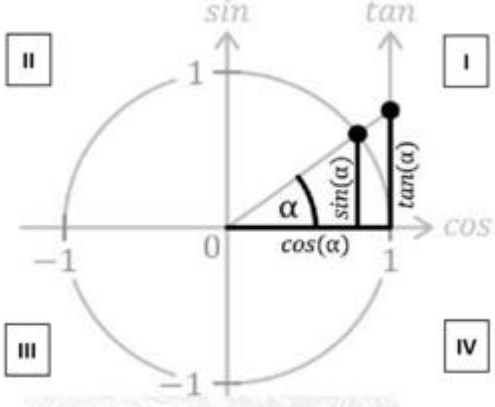
	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

2

Para ángulos diferentes a los anteriores nos basta saber de momento que pueden obtenerse con la calculadora científica; lo importante es ser consciente de que es posible conocer el valor de las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

2.2 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

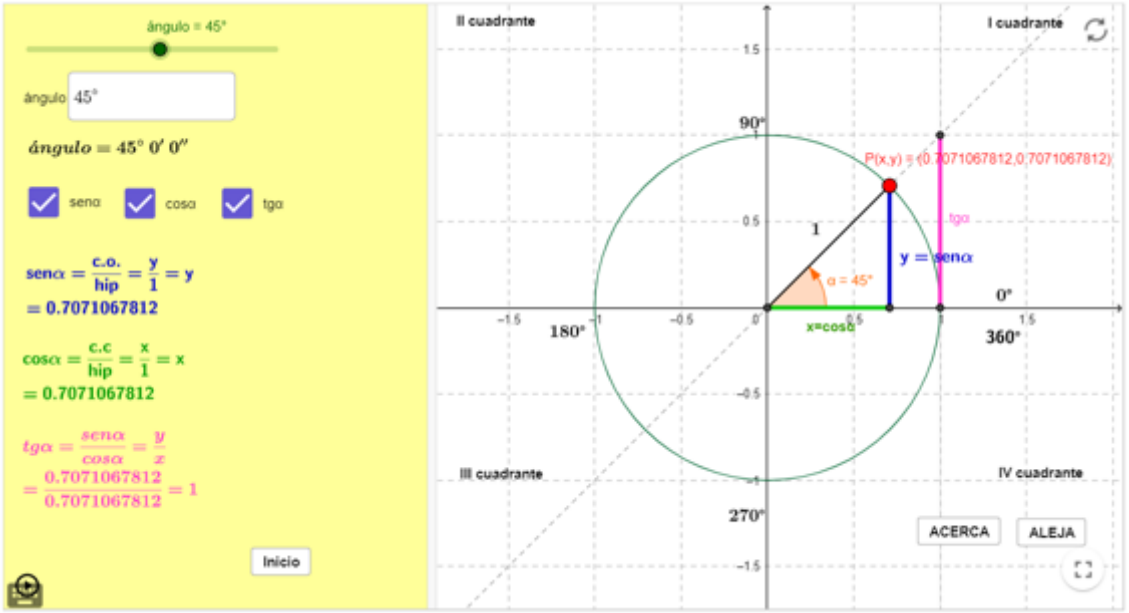
Para ángulos mayores de 90° pueden calcularse también las razones trigonométricas asociadas a ellos utilizando la llamada **circunferencia goniométrica**, que se dibuja centrada en unos ejes cartesianos, siendo su **radio igual a 1**. Esta circunferencia permite dibujar cualquier ángulo comprendido entre 0° y 360° (una vuelta completa), de modo que el punto característico de la circunferencia que determina el ángulo proyecta sobre el eje de abscisas el "cateto contiguo al ángulo", mientras que en el eje de ordenadas proyecta el "cateto opuesto". La hipotenusa del correspondiente triángulo rectángulo es el radio, y como vale la unidad, **la abscisa será el coseno del ángulo mientras que la ordenada será el seno del ángulo.**



De esta manera se deduce que el **seno** y el **coseno** de un ángulo **sólo pueden tener valores comprendidos entre -1 y +1** ([-1, 1]), mientras que la **tangente** puede ser un número comprendido entre -∞ y +∞ ((-∞, ∞)).

¡VAMOS A ENTENDERLO!:

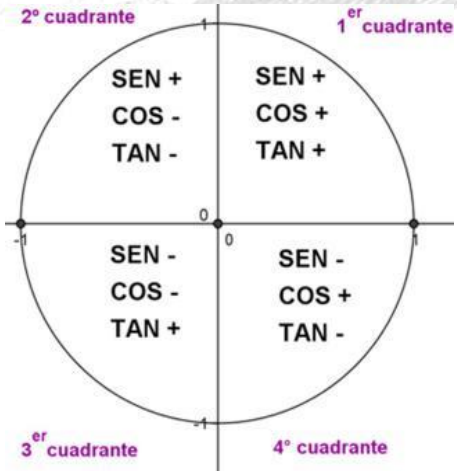
Pinchando en la imagen podremos movernos por la circunferencia goniométrica y entender cómo varían todos los parámetros:



A cada uno de los cuartos en que los ejes dividen la circunferencia se les llama **cuadrante**.

De igual manera, se puede deducir el signo de cada una de las razones trigonométricas en función del cuadrante al que pertenezca.

Si el ángulo es agudo, el punto está en el 1er cuadrante, si el ángulo es obtuso estará en el 2º cuadrante, si el ángulo está entre 180 ° y 270 ° en el 3er cuadrante y si el ángulo está entre 270° y 360°, el punto estará en el 4º cuadrante:



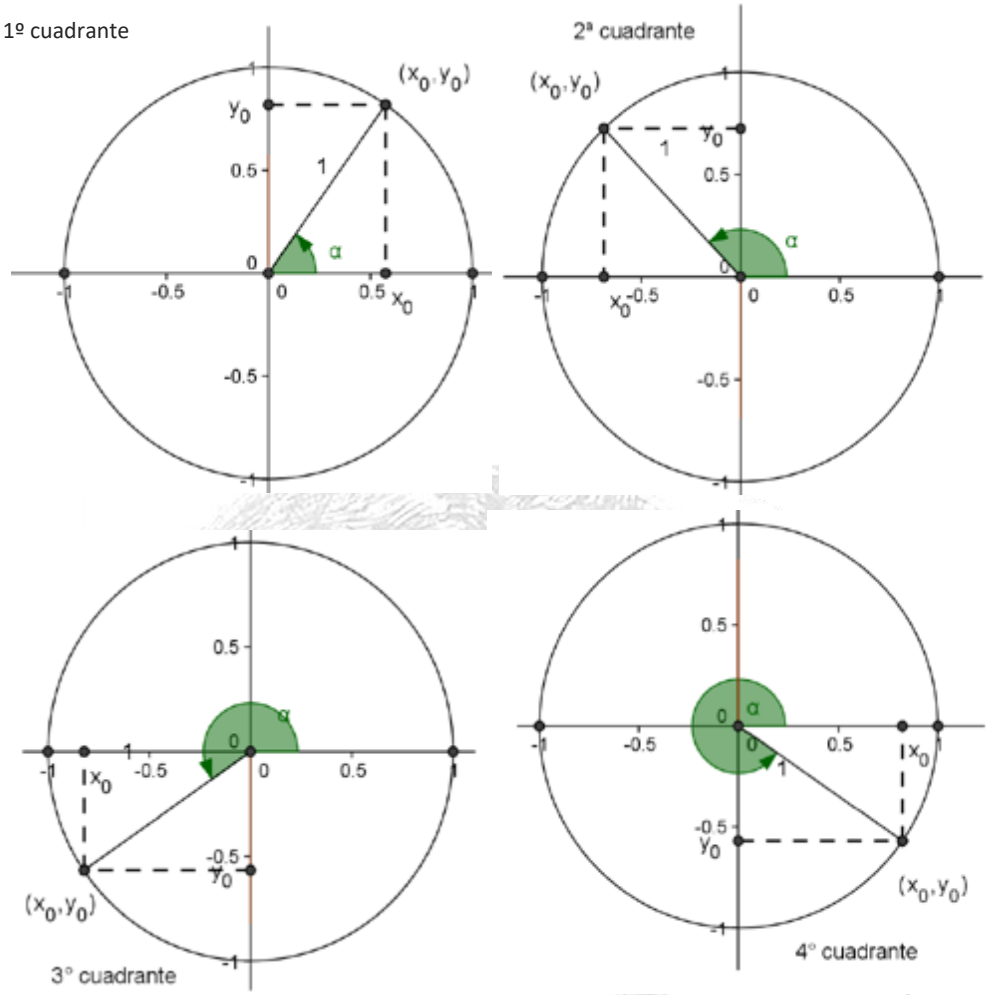


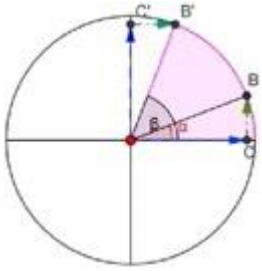
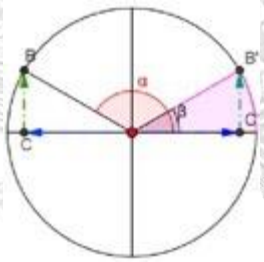
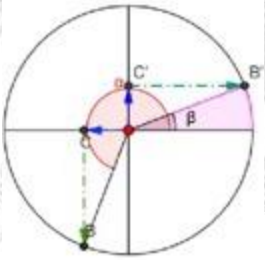
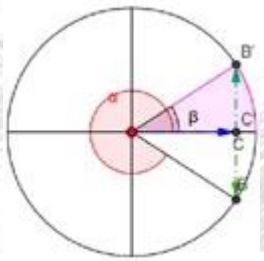
Imagen 6. Cuadrantes en la circunferencia goniométrica

Ejemplo:

Los ángulos del cuarto cuadrante....

a) Tienen el seno y el coseno negativos y la tangente positiva
b) Tienen la tangente y el seno negativos mientras que su coseno es positivo
c) Tienen todas sus razones trigonométricas negativas
d) Tienen todas sus razones trigonométricas positivas

Las razones trigonométricas de ángulos de los diferentes cuadrantes pueden relacionarse con las de ángulos del primer cuadrante, tal como podemos ver a continuación:

Relación	Ángulo (β)	sen (β)	cos (β)	tg (β)
Complementarios ($\alpha + \beta = 90°$) (ángulos del primer cuadrante)		cos (α)	sen (α)	1 / tg (α)
Suplementarios ($\alpha + \beta = 180°$) (ángulos del segundo cuadrante)		sen (α)	- cos (α)	- tg (α)
Difieren 180° ($\beta - \alpha = 180°$) (ángulos del tercer cuadrante)		- sen (α)	- cos (α)	tg (α)
Suman 360° ($\alpha + \beta = 360°$) (ángulos del cuarto cuadrante)		- sen (α)	cos (α)	- tg (α)

Pasos para realizar este tipo de ejercicios:

1) Dibujar la circunferencia goniométrica.
2) Señalar el ángulo β en la circunferencia goniométrica.
3) Buscar el ángulo a que relaciona β con un ángulo del primer cuadrante.

$\beta = 90 + \alpha$;

$\beta = 180 - \alpha$;

$\beta = 180 + \alpha$;

$\beta = 270 - \alpha$;

$\beta = 270 + \alpha$;

$\beta = 360 - \alpha$.

4) Señalar el ángulo α en la circunferencia goniométrica.
5) Marcar sen y cos de los ángulos α y β.
6) Relacionar las razones trigonométricas del ángulo β con las del ángulo α.

Ejemplo:

Calcula las razones trigonométricas de 135°, a partir de los ángulos agudos notables.

Respuesta:

135° es suplementario con 45° (135° + 45° =180°). Las razones trigonométricas de 135° están relacionadas con las de 45°, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135° = \frac{\operatorname{sen} 135°}{\cos 135°} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{-\cos 45°} = -\operatorname{tg} 45° = -1$$

2.3 Propiedades de las razones trigonométricas

Por su propia definición a partir de un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas cumplen ciertas propiedades interesantes que permiten calcular cualquiera de las demás, una vez conocida una.

De la definición de las razones trigonométricas del ángulo α, se deduce: $\boldsymbol{tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$

Además, a partir de la circunferencia goniométrica y **según el teorema de Pitágoras**, obtenemos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\mathbf{sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Si dividimos la identidad anterior por $\operatorname{sen}^2(\alpha)$: $\operatorname{cosec}^2(\alpha) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha)$

Si dividimos la identidad anterior por $\cos^2(\alpha)$: $\sec^2(\alpha) = \operatorname{tg}^2(\alpha) + 1$

2.4 Funciones trigonométricas inversas (función arco).

Como señalamos, las razones trigonométricas en realidad son funciones matemáticas que asignan ciertos valores a cada ángulo, por lo que se pueden plantear las funciones trigonométricas inversas, es decir, las que permiten saber el ángulo a partir del valor de la razón trigonométrica en cuestión.

Función arco cuyo seno es x: *y = arcsen (x) (en la calculadora "sin-1 (x)").*

Función arco cuyo coseno es x: *y = arccos (x) (en la calculadora "cos-1 (x)").*

Función arco cuya tangente es x: *y = arctg (x) (en la calculadora "tan-1 (x)").*

3. APLICACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

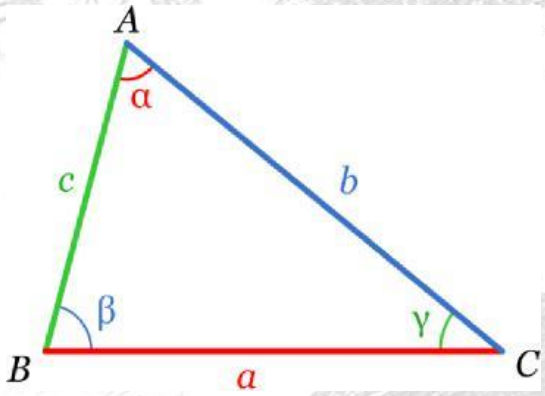
Lo verdaderamente interesante de las razones trigonométricas es que son muy prácticas para resolver problemas de geometría, que suelen estar relacionados con medidas de distancias o de ángulos. En topografía permite dimensionar terrenos y medir distancias de puntos inaccesibles, como cimas de montañas, para lo cual se hace casi imprescindible el uso del teodolito, instrumento que permite medir ángulos con mucha precisión.

Algunos ejemplos de los cálculos trigonométricos son la resolución de triángulos y la obtención de las componentes cartesianas de vectores.

3.1 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo en geometría significa obtener sus componentes: los tres lados y los tres ángulos. Cuando faltan algunos elementos, pueden obtenerse los restantes haciendo uso de la trigonometría. Pueden distinguirse dos casos:

a) Triángulos rectángulos: siempre se conoce un ángulo (el recto), y debemos de conocer dos datos más, ya sean lado/s y/o ángulo/s. Con el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas se puede resolver el triángulo.
b) Triángulos no rectángulos:



a. Teorema del seno:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

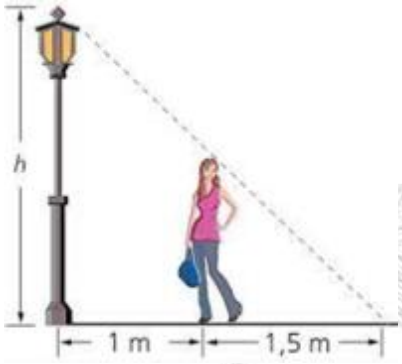
b. Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

3.2 Resolución de problemas cotidianos

1. Sabiendo que Amelia tiene una altura de 162 cm, halla la altura de la farola.

Según se aprecia en la imagen, está claro que Amelia y la farola forman parte de dos triángulos rectángulos semejantes, en los que los rayos de luz forman las hipotenusas y la sombra de Amelia está en el cateto común. Siendo "y" la altura de la farola, por semejanza de triángulos tendremos:

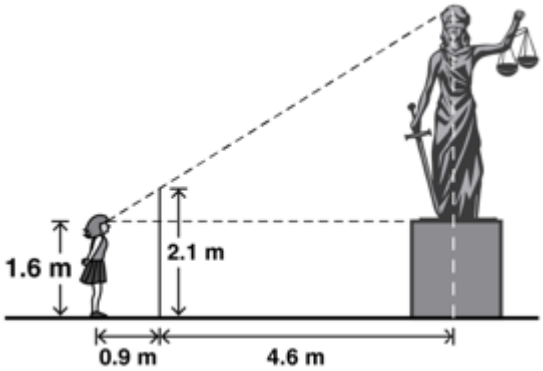


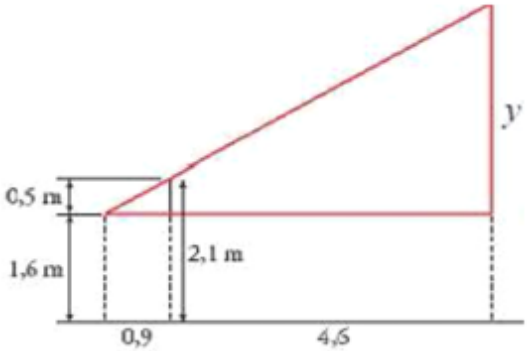
$$\frac{162}{y} = \frac{150}{250} \rightarrow y = \frac{162 \cdot 250}{150} = 270\ cm$$

La farola mide 2,70 m.

2. ¿Cuánto mide la altura de la estatua del dibujo?

Con las mismas consideraciones que en el caso anterior (esquematizando el problema se apreciará mejor) tenemos de nuevo dos triángulos rectángulos semejantes:





Siendo y la altura de la estatua, tendremos:

$$\frac{y}{2{,}1 - 1{,}6} = \frac{0{,}9 + 4{,}6}{0{,}9} \rightarrow \frac{y}{0{,}5} = \frac{5{,}5}{0{,}9}$$

$$0{,}9y = 5{,}5 \cdot 0{,}5 \rightarrow y = \frac{2{,}75}{0{,}9} \approx 3{,}06\ m$$

La estatua tiene 3,06 metros de altura.

4. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Un radián es…

a) Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide lo mismo que el radio usado para trazarlo
b) Es la unidad de medida del sistema internacional y es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide el doble del radio usado para trazarlo
c) Es la unidad de medida de ángulos en el mundo anglosajón

Ejercicio 2

Pasa a radianes o grados según corresponda:

a) 225° b) $\frac{5\pi}{4}$ c) 330° d) $\frac{8\pi}{9}$

Ejercicio 3

La tangente de un ángulo se define como…

a) El cateto opuesto entre cateto contiguo
b) Cateto opuesto entre hipotenusa
c) Cateto contiguo entre cateto opuesto
d) Hipotenusa entre cateto contiguo

Ejercicio 4

1) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo
2) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.
3) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.
4) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.
5) Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.
6) Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?
7) Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°
8) Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

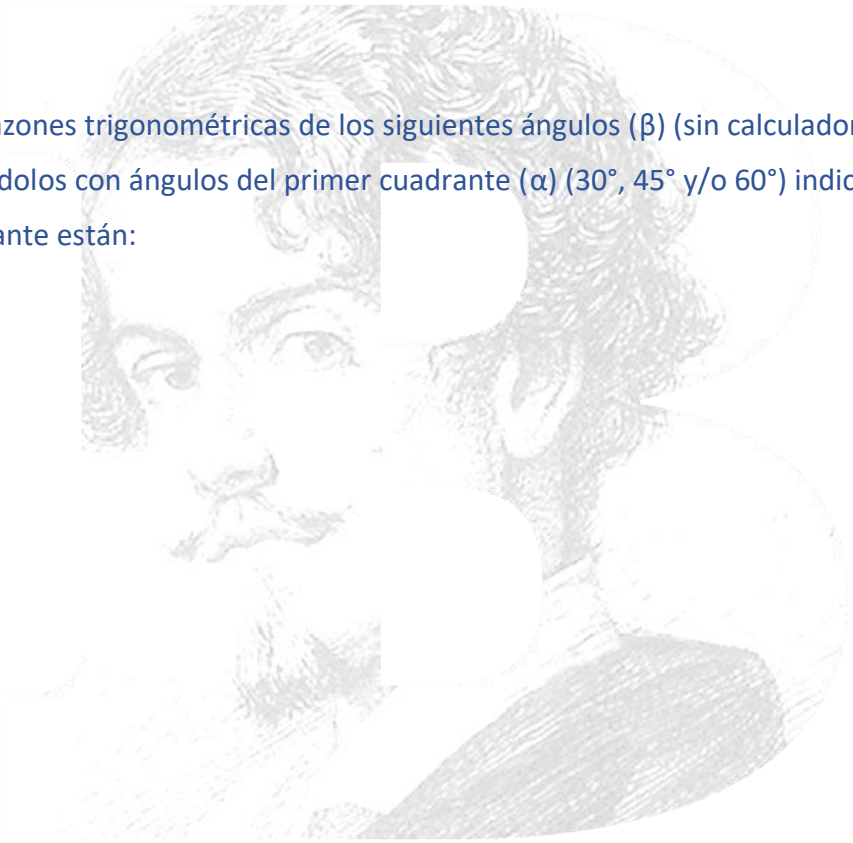
9) Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.
10) La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.

Ejercicio 5

Señala la respuesta correcta…

a) Sen 165° = sen 15°
b) Cos 15° = - cos 165°
c) tg 15° = tg 165°

Ejercicio 6

Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos (β) (sin calculadora) relacionándolos con ángulos del primer cuadrante (α) (30°, 45° y/o 60°) indicando en que cuadrante están:

a) 120°
b) 135°
c) 150°
d) 210°
e) 225°
f) 240°
g) 300°
h) 315°
i) 330°