

Modulo 3 ACT. Parte n°7. Tema 3: Tema 3: Geometría del espacio: Coordenadas geométricas, sistema de representación de los cuerpos en el espacio. Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de los mismos.

Geometría (del griego geo, 'tierra'; metrein, 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

1. FIGURAS PLANAS ELEMENTALES

Recordemos que el **perímetro** es la suma de la longitud de los bordes de una figura geométrica plana.

El perímetro de un círculo se llama longitud de una circunferencia.

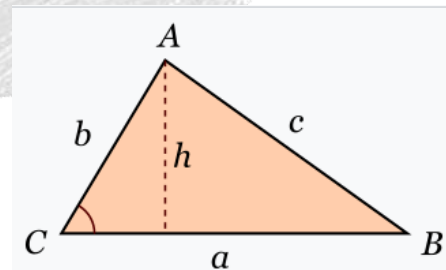
Por otra parte, el **área** (o **superficie**) es el trozo de plano que queda encerrado por el borde de una figura geométrica.

1.1. Perímetros y áreas de figuras planas

Perímetro y área de un triángulo.

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices del triángulo.

El perímetro de un triángulo es igual a la suma de sus lados: $P = a + b + c$



Triángulo

Fuente: <https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo>

Para calcular el área de un triángulo usaremos la siguiente fórmula: $A = (b \cdot h) / 2$

Perímetro y área de un cuadrado.

Un cuadrado es la figura plana cerrada formada por cuatro líneas rectas iguales que forman otros tantos ángulos rectos.



Fuente: URL: <http://www.vitutor.com/> Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Si un cuadrado C tiene lados que miden l , entonces, el perímetro es igual a $4l$, pues los cuatro lados son iguales.

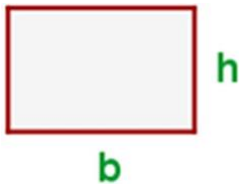
$$P = 4 \cdot l$$

El área de un cuadrado es el producto de la longitud del lado por sí misma.

$$A = l^2$$

Perímetro y área de un rectángulo.

Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.



Fuente: URL: <http://www.vitutor.com/> Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

El perímetro de un rectángulo es igual a la suma de todos sus lados:

$$P = 2 \cdot b + 2 \cdot h$$

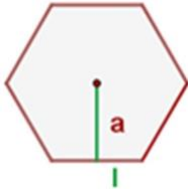
El área de un rectángulo es igual al producto de dos de sus lados contiguos:

$$A = b \cdot h$$

Perímetro y área de un polígono regular.

En geometría, se denomina **polígono regular** a un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Los polígonos regulares de tres y cuatro lados se llaman triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente. Para polígonos de más lados, se

añade el término *regular* (pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, etc).



Fuente: URL: <http://www.vitutor.com/>
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Al tener todos los lados iguales, el perímetro se calcula multiplicando el número de lados por la longitud del lado.

El área de un polígono regular, conociendo el perímetro y la apotema es:

$$A = (\text{perímetro} \cdot \text{apotema}) / 2$$

Siendo la apotema, **a**: segmento perpendicular a un lado, hasta el centro del polígono.

Perímetro (longitud) de una circunferencia.

La **circunferencia** es una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia del centro. El perímetro o longitud de la circunferencia se calcula mediante la siguiente fórmula:



Fuente: www.vitutor.com.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

$$L = 2 \pi r$$

Siendo **r**, **radio**: segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

Área de un círculo.

Un **círculo** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que una cantidad constante, llamada radio. En otras palabras, es la región del plano delimitada por una circunferencia y que posee un área definida.



Fuente: URL: <http://www.vitutor.com/>.

$$A = \pi r^2$$

2. POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

2.2. Poliedros

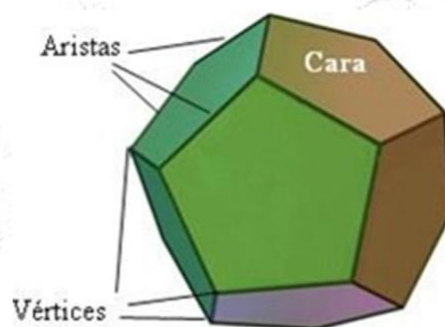
Un **poliedro** es un sólido de caras planas (la palabra viene del griego, poli significa "muchas" y -edro significa "cara").

Cada cara plana (simplemente "cara") es un polígono (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágono...).

Los poliedros tienen elementos comunes, algunos de los cuales son:

- Cara: cada uno de los polígonos que forman o limitan un poliedro.
- Arista: segmento formado por la intersección de dos caras de un poliedro.
- Vértice: punto de intersección de dos o más aristas de un poliedro.

En la siguiente imagen podemos ver estos elementos sobre un poliedro regular formado por doce caras pentagonales, un dodecaedro.

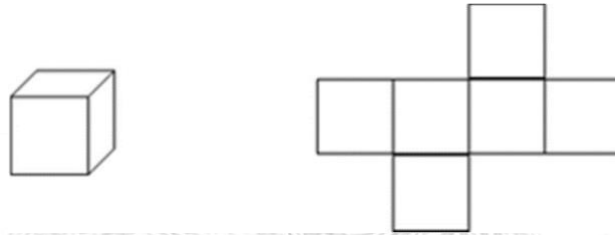


A parte de los elementos que aparecen en el dibujo están los vértices que son los puntos donde se cortan las aristas.

Los elementos de un poliedro convexo cumplen una propiedad curiosa que relaciona el número de caras, el de vértices y el de aristas. Es conocido como la fórmula de Euler y dice que:

“El número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos, es decir: $C + V = A + 2$ ”.

Un punto de vista especial, con respecto a un poliedro se obtiene al realizar el denominado desarrollo plano del mismo, que consiste en dibujar sobre un papel una figura que permita construir el poliedro mediante operaciones de pligado. Por ejemplo, aquí mostramos un desarrollo plano para un cubo, cuerpo geométrico formado por seis caras cuadradas:



2.2.1. Poliedros regulares

Dentro de todos los poliedros que existen hay unos pocos, concretamente **cinco**, que se les conoce como poliedros regulares o sólidos platónicos.

Estos poliedros tienen una propiedad especial y es que todas sus caras están formadas por polígonos regulares iguales. Debido a esta propiedad sólo cinco son los cuerpos geométricos que la cumplen: el tetraedro, el cubo o exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. En la imagen siguiente podemos observar estas figuras junto a su desarrollo plano:

MÓDULO 3 ACT

Parte nº 7: Irracionalidad del número, estudio de la proporción como función.

Representación de sistemas en el plano y en el espacio.

Tema 3: Geometría del espacio: Coordenadas geométricas, sistema de representación de los cuerpos en el espacio. Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de los mismos.

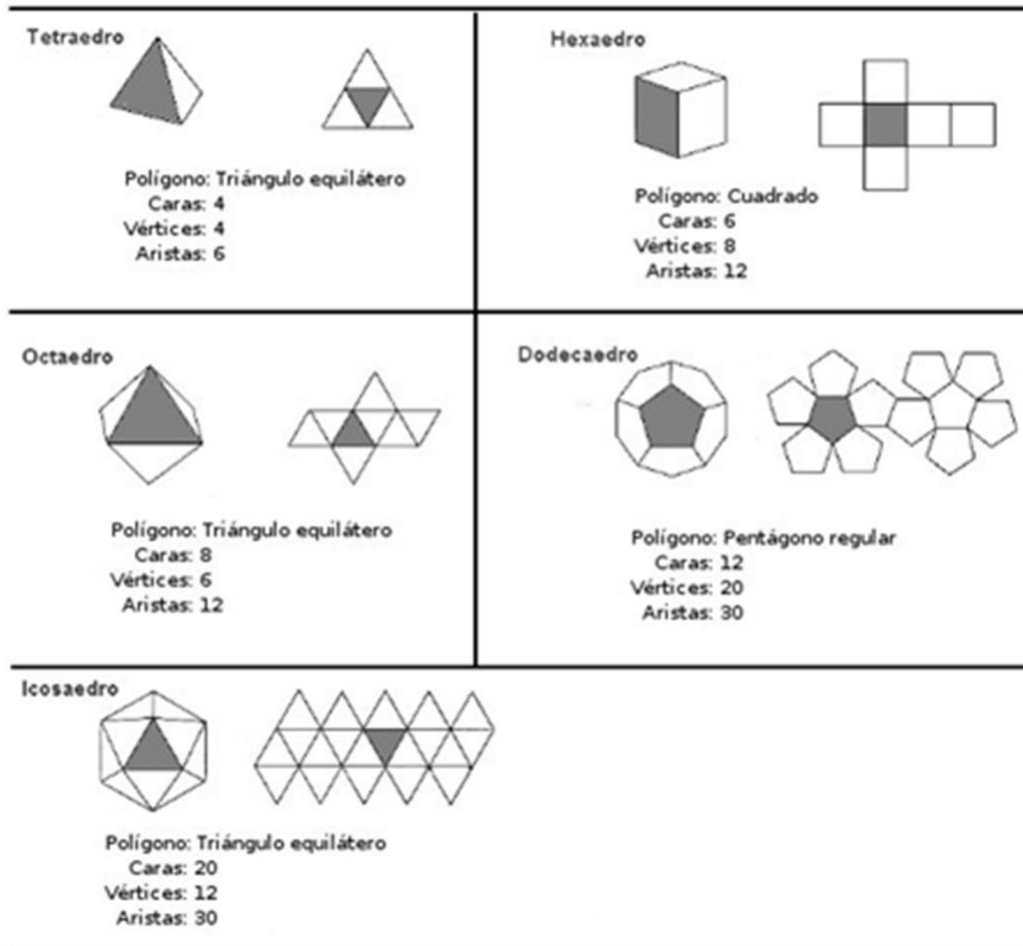
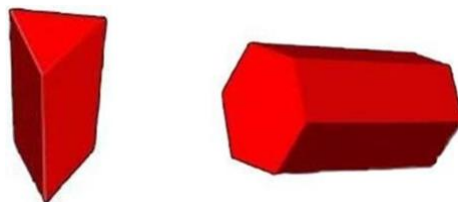


Imagen 9: Poliedros regulares. Fuente: Desconocida.

Prisma

Otro tipo de poliedros son los prismas, estos tienen las características especiales de que sus bases son polígonos regulares iguales y las caras laterales son rectángulos. El nombre de los prismas depende del polígono regular de la base:



Algunos de los elementos de un prisma son los que aparecen en el siguiente dibujo:

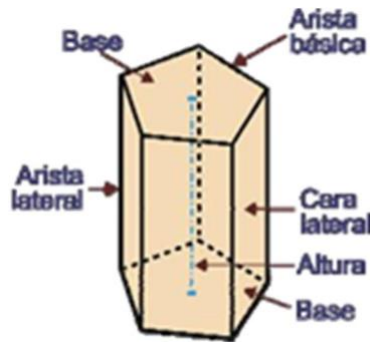


Imagen 11: Elementos de un prisma. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido.
Licencia: Desconocida.

Hay diferentes tipos de prismas, en función de sus características podemos hablar de:

- Prismas regulares: aquellos cuyas bases son polígonos regulares. En función del polígono de las bases, los prismas pueden ser de base triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.
- Prismas irregulares: aquellos cuyas bases son polígonos irregulares.
- Prismas rectos: aquellos cuyas caras laterales son cuadrados o rectángulos.
- Prismas oblicuos: aquellos cuyas caras laterales son romboides o rombos.
- Paralelepípedos: prismas cuyas bases son paralelogramos.
- Ortoedros: prisma que tiene todas sus caras rectangulares.

En la imagen siguiente vemos algunos ejemplos de prismas:

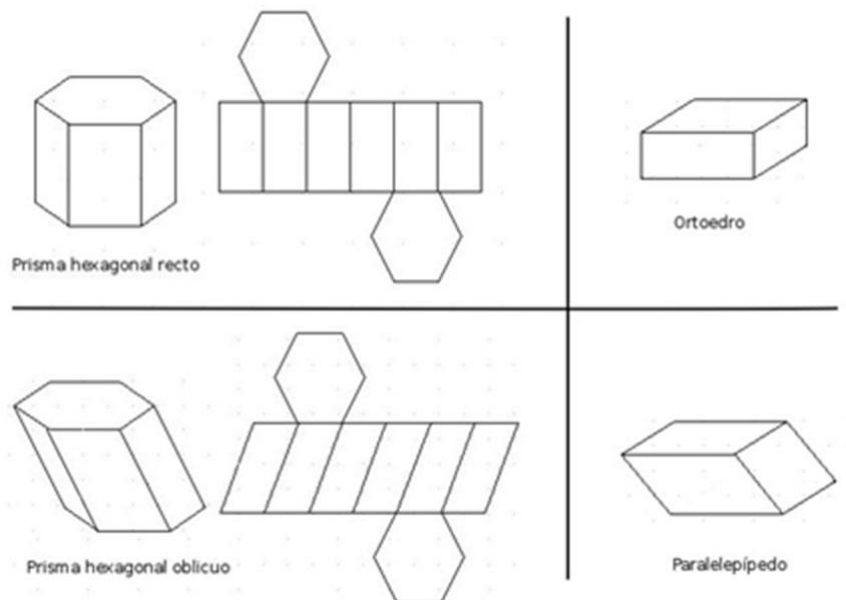


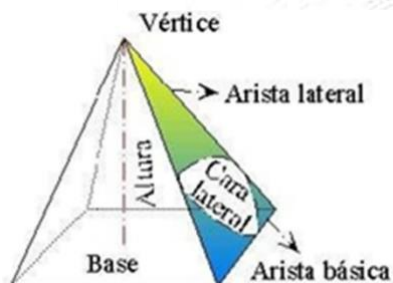
Imagen 12: Ejemplos de prismas. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Pirámides

Siguiendo el análisis de los distintos poliedros llegamos al último que vamos a estudiar a fondo, estos son las pirámides.

Las pirámides están formadas por una cara (la base) que es un polígono regular y caras laterales que son triángulos que se unen en un vértice.

A la hora de llamar a las pirámides el nombre varía dependiendo del polígono regular que tienen por base.



Elementos de una pirámide. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

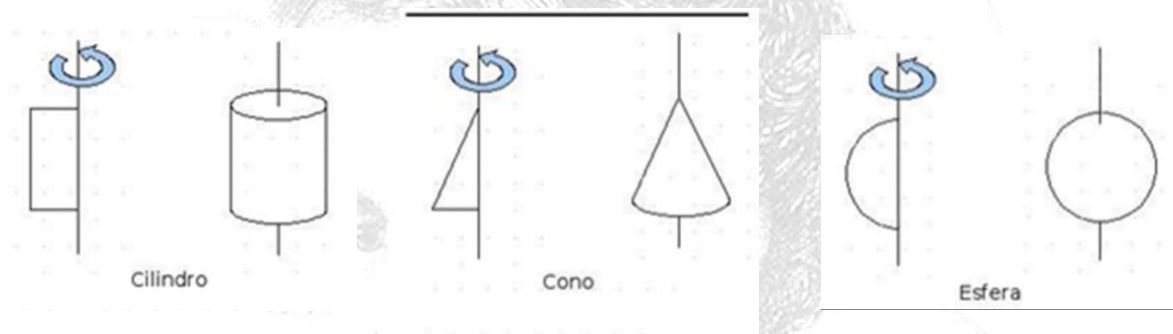
Cuerpos redondos

Los cuerpos geométricos que hemos estudiado por ahora tiene todas sus caras planas,

pero también hay los que las tienen curvas. Estos son los cuerpos redondos. Nos vamos a centrar sólo en el estudio de tres de ellos, son cuerpos que se denominan de revolución, ya que se obtienen cuando hacemos girar una figura geométrica plana.

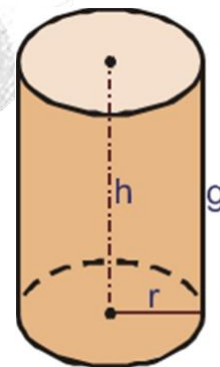
- Si partimos de un rectángulo y lo hacemos girar sobre uno de sus lados obtenemos un cilindro.
- Si partimos de un triángulo rectángulo y lo hacemos girar sobre uno de sus catetos obtenemos un cono.
- Si partimos de una media circunferencia y la hacemos girar sobre el diámetro obtenemos una esfera.

La imagen ilustra la construcción de los cuerpos de la revolución citados.



El cilindro

Como hemos dicho antes se obtiene al hacer girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Los elementos de un cilindro son:

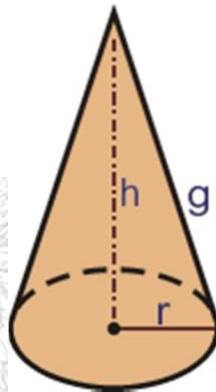


Donde h simboliza la altura del cilindro, g la generatriz y r el radio de la base.

El cono

Al igual que el cilindro es un cuerpo de revolución, obtenido, como ya hemos dicho, al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

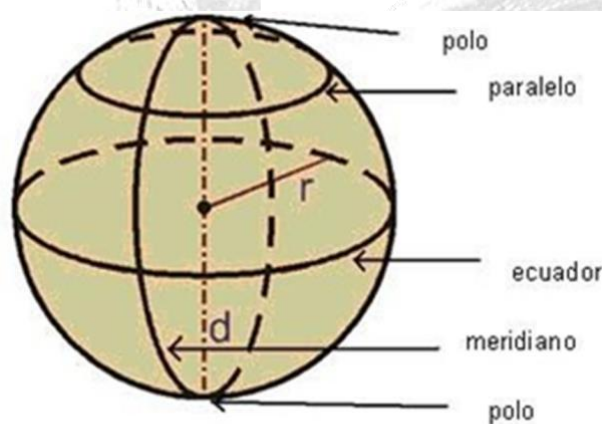
Los elementos de un cono son:



Donde h simboliza la altura del cilindro, g la generatriz y r el radio de la base

Esfera

Por último, la esfera, cuerpo de revolución que se obtiene al girar una semicircunferencia. Se usa como modelo ya sea para arquitectura, moda, deportes, balones,...; además es una de las formas que más se repite en la naturaleza: los planetas, distintas frutas, semillas,... Sus elementos son:



Y la r simboliza el radio y la d el diámetro

El área y el volumen

Hay veces que necesitamos saber la superficie de alguno de los cuerpos que hemos estudiado así como la capacidad interior que tiene.

Supongamos que queremos poner un depósito de agua de forma cilíndrica con la mayor capacidad posible, para ello necesitamos calcular el área de un cilindro y el volumen del mismo.

Para calcular el área de los cuerpos geométricos lo primero que tenemos que visualizar es el desarrollo de cada uno.

Cuerpo geométrico	Desarrollo	Área y volumen
Prisma recto		$A_L = p \cdot h$ $A_T = p \cdot h + 2A_B$ $V = A_B \cdot h$
Pirámide recta		$A_L = \frac{p \cdot a_p}{2}$ $A_T = \frac{p \cdot a_p}{2} + A_B$ $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$
Cilindro recto		$A_L = 2\pi r \cdot h$ $A_T = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ $V = \pi r^2 \cdot h$
Cono recto		$A_L = \pi r \cdot g$ $A_T = \pi r \cdot g + \pi r^2$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3} \pi r^3$