Tema 4.- La Función lineal y cuadrática.

M3_Parte 8_Tema 4_Funcion Lineal Cuadratica

Tabla de contenido

Primer Tema: Funciones Matemáticas 4

2. Funciones 6

2.1. Ejes de coordenadas o cartesianos 8

2.2. Tabla de valores o de datos 15

2.3. Gráficas 18

2.3.1. Características de las gráficas 20

3. Interpretación de gráficas 24

4. Función lineal 27

4.1. Función lineal o de proporcionalidad directa 28

4.2. Función afín 33

4.3 Función constante 36

4.4. Aplicaciones de la función lineal 37

5. Función cuadrática 41

5.1. Elementos de la parábola 44

Tema 4.- La Función lineal y cuadrática.

Material financiado por el Ministerio de Educación y Formación Profesional y por la Unión Europea-Next GenerationEU, en el marco del Componente 19, inversión 1 del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia.

Tema 1 - Funciones. Función lineal. Función cuadrática.

1. Introducción

Primer Tema: Funciones Matemáticas

1. Generalidades de Funciones

- **Objetivo**: Comprender los conceptos básicos de las funciones matemáticas.
- **Contenidos**
  - **Definición de función**: Relación entre dos conjuntos en la que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo.
  - **Interpretación de gráficas**: Cómo leer y entender las gráficas que representan funciones.
  - **Conocimientos previos necesarios**: Conceptos de álgebra y geometría básicos que facilitarán el estudio de funciones específicas.

2. Función Lineal

- **Objetivo**: Estudiar las funciones lineales y su aplicación en situaciones reales.
- **Contenidos**
  - **Definición**: Funciones de la forma $f(x) \quad ax + b$, donde a y b son constantes.
  - **Gráfica**: Representación gráfica de la función lineal como una línea recta.
  - **Aplicaciones**: Resolución de problemas cotidianos utilizando funciones lineales.

3. Función Cuadrática

- **Objetivo**: Explorar las funciones cuadráticas y su uso en la resolución de problemas prácticos.
- **Contenidos**
  - **Definición**: Funciones de la forma $f(\ )$ $x^2 + bx +$, donde b, y son constantes.
  - **Gráfica**: Representación gráfica de la función cuadrática como una parábola.
  - **Aplicaciones**: Ejemplos y problemas del mundo real que se resuelven mediante funciones cuadráticas.

Enfoque del Estudio

- **Interpretación y Representación**: Desarrollar habilidades para interpretar gráficas y representar funciones matemáticas.
- **Aplicación Práctica**: Utilizar el conocimiento de funciones para resolver problemas reales y cotidianos, facilitando así la comprensión y la utilidad práctica de las matemáticas.

Este enfoque estructurado facilita el aprendizaje gradual y profundo de las funciones matemáticas, integrando teoría y práctica para preparar a los estudiantes para resolver problemas con confianza en el mundo actual.

2. Funciones

Concepto de Función

Definición Básica: Una función es una relación matemática entre dos magnitudes donde a cada valor de una variable (llamada **variable independiente**) le corresponde un único valor de otra variable (llamada **variable dependiente**).

Características Claves:

- **Variable Independiente (X)**: La variable que podemos controlar o elegir libremente.
- **Variable Dependiente (Y)**: La variable cuyo valor depende del valor de la variable independiente.

Ejemplo Práctico:

- **Situación**: Precio de un viaje en taxi.
  - **Fórmula de la Función** $y \quad f(\ ) \quad 0.5 \quad + 3y$ f(x) 0.5x 3
  - **Variable Independiente (X)**: Tiempo en minutos del viaje.
  - **Variable Dependiente (Y)**: Precio total del viaje.

  Interpretación

  - **Bajada de bandera**: 3€
  - **Costo por minuto**: 0.5€ por minuto
  - **Cálculo**: Para un viaje de 15 minutos, el costo es $f(15) \quad 0.5 \times 15 + 3 \quad 10.5$ f(15) 0.5 15+3 10.5€

Representación de Funciones:

1. **Expresión Algebraica**: La fórmula matemática que describe la función. Ejemplo: $y \quad 0.5 \quad + 3y$ 0.5x+3
2. **Tabla de Valores**: Lista de pares de valores (X, Y) que muestra cómo se relacionan las variables.
3. **Gráfica**: Representación visual de la función en un sistema de ejes cartesianos. La gráfica de una función lineal es una línea recta, y la de una función cuadrática es una parábola.

Estudio de Funciones:

- **Interpretación Gráfica**: Facilita la comprensión de cómo cambian las variables en función una de la otra.
- **Fórmula**: Permite calcular valores específicos de la variable dependiente a partir de la variable independiente.
- **Tabla de Valores**: Útil para ver y analizar ejemplos concretos y sus resultados.

Resumen:

- Una función relaciona dos magnitudes mediante una expresión matemática.
- La variable independiente se elige libremente y la variable dependiente depende de ella.
- Las funciones se pueden expresar algebraicamente, mediante tablas de valores o gráficamente, y conocer una de estas formas nos permite determinar las otras.

Esta estructura y explicación proporcionan una base sólida para comprender cómo funcionan las funciones y cómo se pueden aplicar en diversas situaciones.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

$y = f(x) = 0{,}5X + 3$

TABLA DE VALORES

x	10	20	30
y= 3 + 0.5x	8	13	18

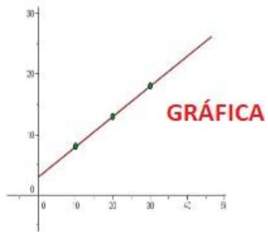


Imagen Nº 1. Representación de Funciones. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Existen diversos tipos de funciones, en este tema nos centraremos en las FUNCIONES LINEALES y CUADRÁTICAS, las que se representan gráficamente mediante una recta y una parábola, respectivamente. Pero antes de comenzar con ellas recordaremos algunos conceptos que necesitamos para empezar.

2.1. Ejes de coordenadas o cartesianos

Ejes de coordenadas (o ejes cartesianos): Son dos líneas perpendiculares en un plano, el eje horizontal (abscisas o eje X) y el eje vertical (ordenadas o eje Y), que se intersectan en el origen (0, 0) y se utilizan para ubicar puntos y representar gráficamente relaciones entre variables.

Sistema de Coordenadas Cartesianas: Es un sistema de referencia en un plano bidimensional que utiliza dos ejes perpendiculares (el eje X o de abscisas y el eje Y o de ordenadas) para ubicar puntos. El punto de intersección de estos ejes se llama origen (0, 0).

Determinación de Puntos en el Plano Cartesiano: Es el proceso de ubicar un punto específico usando un par ordenado de coordenadas (y)(x y), donde xx indica la distancia horizontal desde el eje Y y yy la distancia vertical desde el eje X.

Recta Numérica y Representación en Una Dimensión

1. **Recta Numérica:**
   - **Definición**: Una línea horizontal sobre la que se representan los números en una dimensión.
   - **Punto de Referencia**: El punto de referencia es el 0, que divide la recta en números positivos (a la derecha de 0) y números negativos (a la izquierda de 0).
2. **Representación en Una Dimensión:**
   - **Valores Positivos y Negativos**: Los valores se colocan a lo largo de la recta según su magnitud. Los números positivos se colocan hacia la derecha del 0, y los números negativos hacia la izquierda.
   - **Unidimensionalidad**: Al trabajar con una sola variable, estamos tratando con una dimensión. Esto significa que cualquier punto en la recta puede ser descrito simplemente por un valor numérico.
3. **Aplicación en Funciones Lineales:**
   - **Eje X**: En una gráfica de funciones lineales, el eje X representa la variable independiente. Los valores de esta variable se trazan a lo largo de una línea horizontal.
   - **Valor de la Función (Y)**: La salida o valor de la función para cada valor de X se traza en el eje Y, el cual se considera la segunda dimensión.

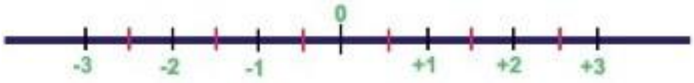


Imagen Nº 3. Recta. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Representación en Dos Dimensiones:

Para representar funciones que dependen de dos variables, como las funciones lineales y cuadráticas, pasamos a un **sistema de coordenadas bidimensional**

1. **Sistema de Coordenadas:**
   - **Eje X**: Horizontal, para la variable independiente.
   - **Eje Y**: Vertical, para la variable dependiente.
   - **Punto de Intersección (Origen)**: Donde los ejes X e Y se cruzan (0,0).
2. **Gráficas en Dos Dimensiones:**
   - **Funciones Lineales**: Se representan como líneas rectas. La pendiente y la ordenada al origen determinan la posición y la inclinación de la línea.
   - **Funciones Cuadráticas**: Se representan como parábolas. La forma de la parábola y su orientación (hacia arriba o hacia abajo) dependen del coeficiente

     en la función cuadrática $y \qquad {}^2 + b \quad +$
3. **Interpretación de la Gráfica:**
   - **Ejes Cartesianos**: La gráfica muestra cómo la variable dependiente (Y) cambia en relación con la variable independiente (X).
   - **Puntos de Intersección**: Donde la gráfica cruza los ejes proporciona información útil, como las raíces de la función (dónde cruza el eje X) y el valor de la función cuando X es 0 (ordenada al origen).

Resumen:

- **En una dimensión**, utilizamos una recta numérica para representar valores únicos y unidimensionales.
- **En dos dimensiones**, utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas para representar funciones que dependen de dos variables, permitiendo la visualización gráfica de las relaciones entre esas variables.

Estos conceptos te preparan para comprender y trabajar con gráficos de funciones y la representación de datos en diferentes dimensiones, facilitando el análisis y la resolución de problemas matemáticos.

Recuerda que si trabajamos en el plano, necesitamos dos valores para referirnos a cualquier punto. Seguro que recuerdas el famoso juego de los barcos: tocado, hundido y agua. De la misma manera, si tenemos dos variables que están relacionadas (una función), que toman valores numéricos y los queremos dibujar, tendremos que utilizar dos rectas o ejes diferentes (cada uno para los datos correspondientes a una variable) y que sean secantes para poder establecer la relación entre ambas. Si las rectas se cortan de forma perpendicular, es más sencillo trabajar.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

1. **Ejes Cartesianas:**

   - **Eje de Abscisas (Eje X):**
     - **Descripción:** Eje horizontal.
     - **Representación:** Valores de la variable independiente, comúnmente denotada como xx
     - **Función:** Mide la distancia horizontal desde el eje Y.
   - **Eje de Ordenadas (Eje Y):**
     - **Descripción:** Eje vertical.
     - **Representación:** Valores de la variable dependiente, comúnmente denotada como yy
     - **Función:** Mide la distancia vertical desde el eje X.

2. **Origen de Coordenadas:**

   - **Descripción:** El punto de intersección de los ejes X e Y, con coordenadas (0, 0).
   - **Función:** Punto de referencia para medir las coordenadas de otros puntos en el plano.

3. **Cuadrantes del Plano:**

   - **Cuadrante I:**
     - **Ubicación:** Parte superior derecha.
     - **Características:** Ambas coordenadas x e yy son positivas.
   - **Cuadrante II:**
     - **Ubicación:** Parte superior izquierda.
     - **Características:** x es negativo y yy es positivo.
   - **Cuadrante III:**
     - **Ubicación:** Parte inferior izquierda.
     - **Características:** Ambas coordenadas x e yy son negativas.
   - **Cuadrante IV:**
     - **Ubicación:** Parte inferior derecha.
     - **Características:** x es positivo y yy es negativo.

4. **Ubicación de Puntos:**

   - **Determinar la Ubicación:**
     - **Desde el Origen (0, 0):** Se mueve una distancia xx a la derecha (si xx es

positivo) o a la izquierda (si xx es negativo), y luego una distancia yy hacia arriba (si yy es positivo) o hacia abajo (si yy es negativo).

- **Ejemplo:**
  - **Punto (4, -3):** Se mueve 4 unidades a la derecha del eje Y y 3 unidades hacia abajo del eje X, ubicándose en el Cuadrante IV.

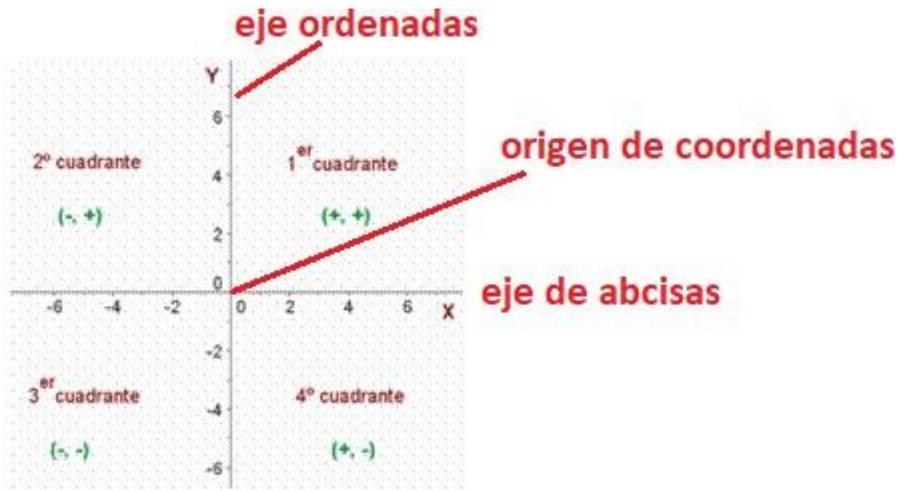


Imagen Nº 4. Ejes de coordenadas. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Resumen

- **Sistema de Coordenadas Cartesianas:** Permite representar puntos en un plano utilizando dos ejes perpendiculares.
- **Eje de Abscisas (X):** Representa la variable independiente y se extiende horizontalmente.
- **Eje de Ordenadas (Y):** Representa la variable dependiente y se extiende verticalmente.
- **Origen de Coordenadas:** Punto de intersección de los ejes (0, 0).
- **Cuadrantes:** Dividen el plano en cuatro áreas basadas en los signos de las coordenadas x e y

Determinación de Puntos en el Plano Cartesiano

1. **Eje de Coordenadas:**
   - **Eje de Abscisas (Eje X):**
     - **Descripción:** Eje horizontal.
     - **Función:** Representa la distancia horizontal desde el eje vertical.
   - **Eje de Ordenadas (Eje Y):**
     - **Descripción:** Eje vertical.
     - **Función:** Representa la distancia vertical desde el eje horizontal.
2. **Origen de Coordenadas:**
   - **Descripción:** El punto donde se cruzan los ejes X e Y.

- **Coordenadas:** (0 0)(0 0)
- **Función:** Punto de referencia para medir y ubicar otros puntos en el plano.

3. **Coordenadas de un Punto:**
   - **Formato:** Un par ordenado de números reales $(x\ \ y)$(x y)
     - x**x (Abscisa):** La distancia horizontal desde el eje Y. Un valor positivo indica que el punto está a la derecha del eje Y, y un valor negativo indica que está a la izquierda.
     - y**y (Ordenada):** La distancia vertical desde el eje X. Un valor positivo indica que el punto está arriba del eje X, y un valor negativo indica que está abajo.
4. **Ubicación de un Punto:**
   - **Desde el Origen (O):**
     - **Movimiento Horizontal:** Desplazamiento de xx unidades a la derecha (si xx es positivo) o a la izquierda (si x es negativo).
     - **Movimiento Vertical:** Desplazamiento de yy unidades hacia arriba (si yy es positivo) o hacia abajo (si yy es negativo).
5. **Ejemplos:**
   - **Punto A (3, -2):**
     - **Abscisa (3):** Mueve 3 unidades a la derecha del eje Y.
     - **Ordenada (-2):** Mueve 2 unidades hacia abajo del eje X.
     - **Ubicación:** Cuadrante IV (dado que xx es positivo y yy es negativo).
   - **Punto B (-4, 5):**
     - **Abscisa (-4):** Mueve 4 unidades a la izquierda del eje Y.
     - **Ordenada (5):** Mueve 5 unidades hacia arriba del eje X.
     - **Ubicación:** Cuadrante II (dado que xx es negativo y yy es positivo).
6. **Relación entre Coordenadas y Puntos:**
   - **Coordenadas a Punto:** Cada par ordenado de coordenadas (y)(x y) define un punto único en el plano.
   - **Punto a Coordenadas:** Cada punto en el plano se puede describir mediante sus coordenadas $(x\ \ y)$(x y)

Resumen

- **Sistema de Coordenadas Cartesianas:** Utiliza dos ejes perpendiculares para definir puntos en un plano bidimensional.
- **Coordenadas del Punto:** Determinan la posición de un punto mediante distancias horizontales (abscisa) y verticales (ordenada) desde el origen.
- **Posicionamiento:** Los valores positivos y negativos indican direcciones y distancias a partir del origen.

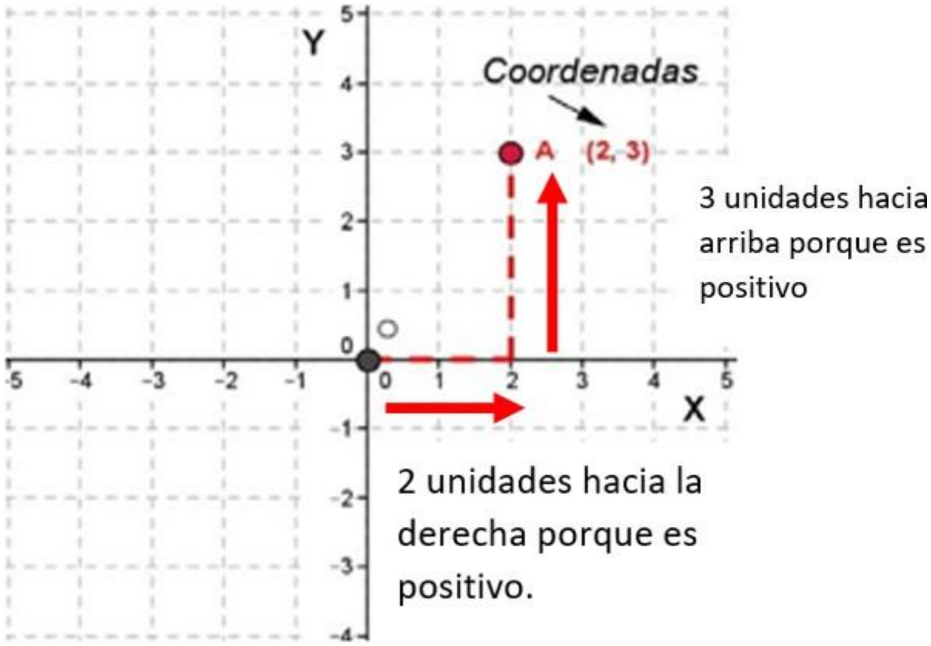
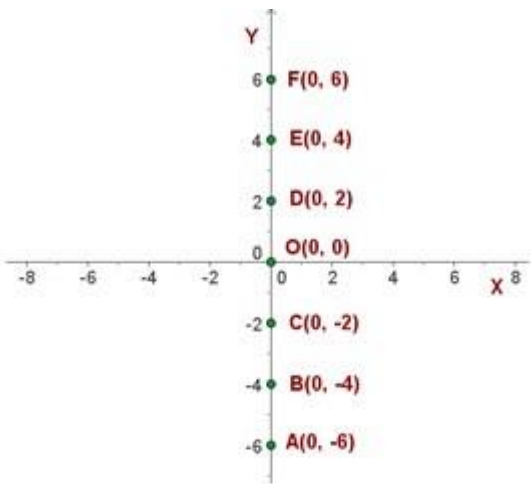


Imagen Nº 5. Coordenadas. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Es muy importante que domines todo lo relacionado con las coordenadas de los puntos. Así, debemos saber dibujar un punto en los ejes a partir de sus coordenadas y al revés, obtener las coordenadas a partir de su representación en los ejes.

Observa ahora algunas pautas que te ayudarán a realizar esas dos tareas más rápidas:



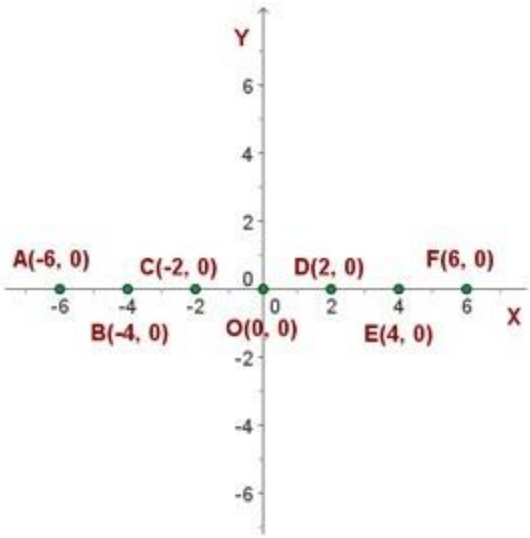


Imagen Nº 6. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Los puntos situados en el eje de ordenadas tienen su abcisa igual a 0.

Los puntos situados en el eje de abscisas tienen su ordenada igual a 0.

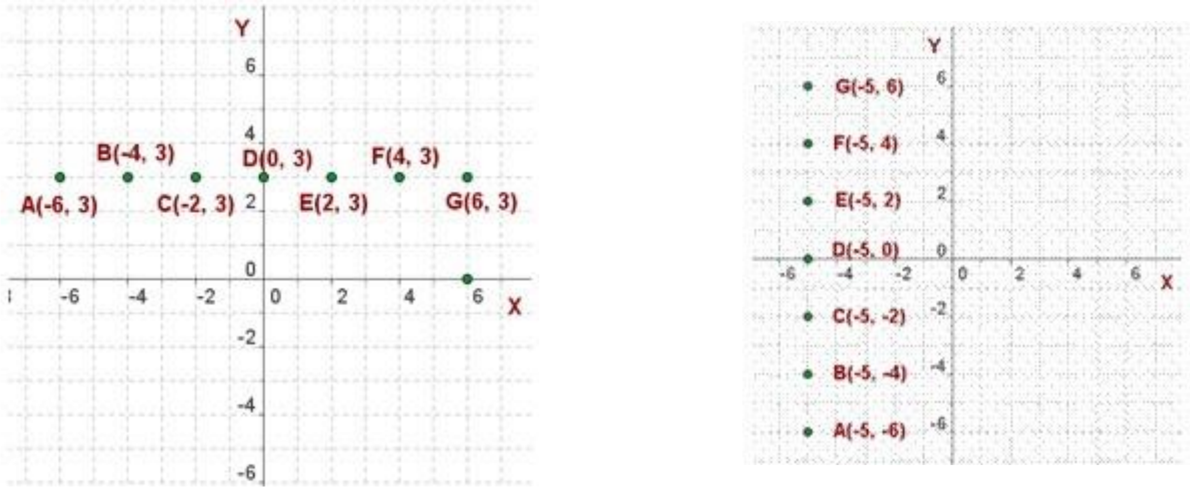


Imagen Nº 7. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Los puntos situados en la misma línea horizontal (paralela al eje de abscisas) tienen la misma ordenada.

Los puntos situados en una misma línea vertical (paralela al eje de ordenadas) tienen la misma abscisa.

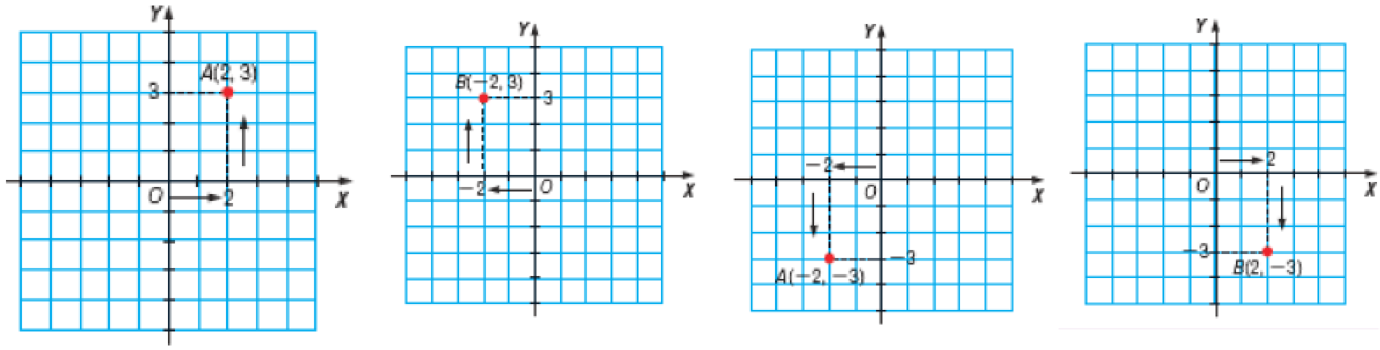


Imagen Nº 8. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Los puntos del **primer cuadrante** tienen el valor de sus dos coordenadas positivas.

Los puntos del **segundo cuadrante** tienen su abcisa negativa y su ordenada positiva.

Los puntos del **tercer cuadrante** tienen ambas coordenadas negativas.

Los puntos del **cuarto cuadrante** tienen su abcisa positiva y su ordenada negativa.

2.2. Tabla de valores o de datos

Una tabla de valores es una representación gráfica que organiza datos en **filas y columnas**. Cada celda contiene un **par ordenado de valores** que ilustra la **relación entre dos magnitudes o variables**, permitiendo así la **visualización y el análisis** de cómo una variable cambia en función de la otra.

Ejemplo:

Tiempo (horas)	Distancia (km)
	5
2	10
3	15
4	20

En esta tabla, el tiempo en horas y la distancia en kilómetros son variables relacionadas. Cada fila muestra cómo cambia la distancia en función del tiempo.

La siguiente tabla nos muestra la variación del precio de las patatas, según el número de kilogramos que compremos.

Kg de patatas		2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

La siguiente tabla nos indica el número de alumnos que consiguen una determinada nota en un examen

Nota	0		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos			2	3	6	1	12	7	4	2	

¿Cómo se completa una tabla de datos?

Hay diferentes formas. Veámoslas:

1ª) Pues bien, nosotros **a partir de una gráfica** podemos obtener su tabla de valores. No hay más que identificar puntos que pertenezcan a la gráfica y determinar cuáles son sus coordenadas.

Éstas serán los pares ordenados de la tabla. Veamos cómo se hace con un ejemplo. Supongamos que nos dan la siguiente gráfica:

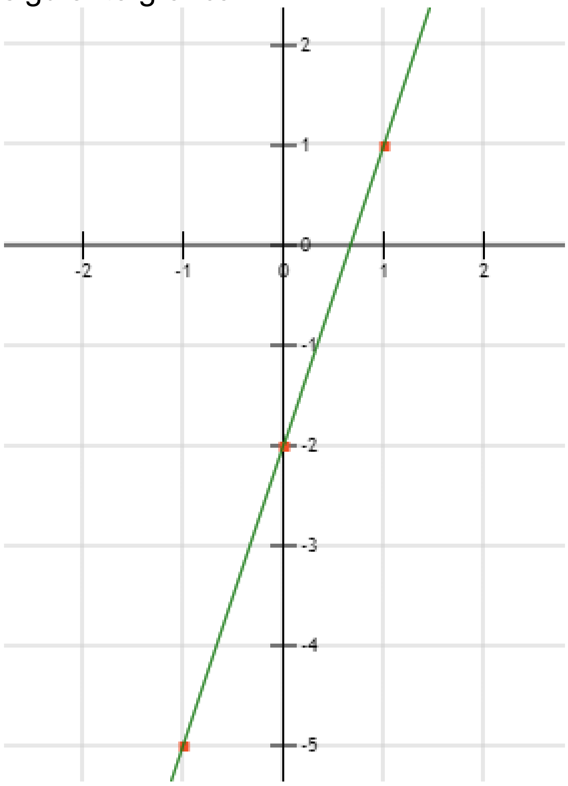


Imagen Nº 10. Gráfica. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Si nos fijamos bien nos aparecen tres puntos fáciles de localizar sus coordenadas. De izquierda a derecha serían: (-1,-5) ; (0,-2) ; (1,1). Estos tres puntos los podemos presentar en una tabla de valores como la que sigue:

x	-	0	1
y	-5	-2	1

2ª) Cómo realizamos nuestra tabla de valores cuando en lugar de facilitarnos la gráfica nos dan la **expresión analítica o algebraica** de la función. Si continuamos con nuestro ejemplo, su expresión algebraica sería $f(x)=3x-2$. En este caso, lo que haremos será calcular el valor de la función para diferentes valores de x. Si no me exigen determinados valores para la x elegimos nosotros los que deseemos. ¿Cómo se hace esto?:

Si x= -1 → f(-1)= 3· (-1) -2 = -3-2 = -5 Si te das cuenta, lo que hacemos en sustituir el -1 por la x. Es decir, poner el -1 donde en la función aparece x, y después operamos. Así nos sale un par ordenado formado por: **(-1, -5)**
Si x= 0 → f(0)= 3· 0 -2= 0-2 = -2 → **(0, -2)**
Si x = 1 → f(1)= 3·1-2= 3-2= 1 → **(1, 1)**

Ahora ya tenemos nuestros tres pares ordenados que podemos situarlos en una tabla de valores:

x	-1	0	
y	-5	-2	

Rellenar huecos

EJERCICIO 4

Completa los valores de la siguientes tablas:

Kg de limones	0	4		7	8	
Precio en €	0	2	5			1,5

Enviar

Por 5€ nos dan 10Kg, 7Kg cuestan 3’5€, 8Kg cuestan 4€ mientras que por 1,5€ nos darán 3Kg.

Rellenar huecos

EJERCICIO 5

Completa los valores de la siguientes tablas:

Valor	0	-2	2		-3	o	3
Valor al cuadrado	0	4	4			16	

Enviar

Los pares que faltan son (1,1), (-3,9), (4,16) o (-4,16) y

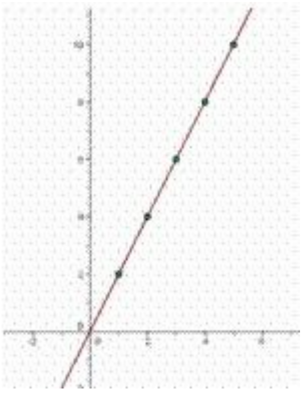
2.3. Gráficas

Una gráfica es una representación visual de los pares ordenados de una tabla, trazada en un **sistema de ejes de coordenadas**. Las gráficas ilustran las relaciones entre dos variables:

- **Variable Independiente (x):** Representada en el eje horizontal.
- **Variable Dependiente (y):** Representada en el eje vertical, y su valor depende del valor de la variable x

Así, la gráfica muestra cómo la variable yy cambia en función de la variable xx

Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones. Para interpretar una gráfica, hemos de observarla de izquierda a derecha, analizando cómo varía la variable dependiente y, al aumentar la variable independiente, x.



Kg de patatas		2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

Imagen Nº 12. Gráfica y Tabla de Datos. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

En esa gráfica podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando.

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	**1**	**1**	**2**	**3**	**6**	**11**	**12**	**7**	**4**	**2**	**1**

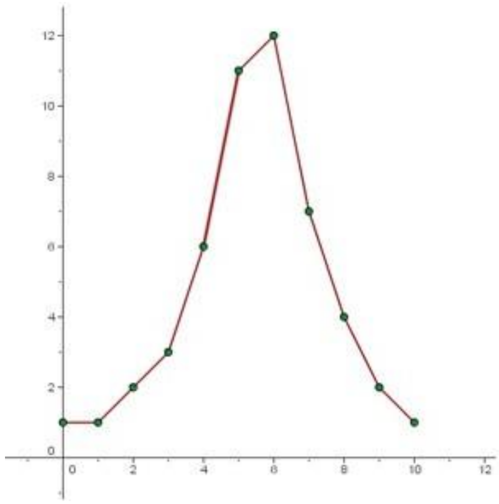


Imagen Nº 13. Gráfica y Tabla de Datos. Fuente: Imagen de Elaboración Propia
En esta gráfica observamos que la mayor parte de los alumnos obtienen una nota comprendida entre 4 y 7.

Al igual que hicimos con la tabla de valores, también podemos representar gráficamente una función a partir de la expresión algebraica. Para ello, primero haremos nuestra tabla de valores, y una vez que tenemos esos pares ordenados procederemos a dibujar esos puntos en nuestros ejes cartesianos.

EJEMPLO:

Imagina que nos dan la expresión de una función: f(x)= 2x+1 y nos piden representarla. Primero, haremos nuestra tabla de valores, y para ello debemos calcular el valor de la función para diferentes valores de x. Valores que elegiremos nosotros.

Valor de X	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x y=f(x)	pares ordenados
x=-	f(-1)=2·(-1)+1=-2+1=-1	(-1,-1)
x=0	f(0)=2·0+1=0+1=1	(0,1)
x=	f(1)=2·1+1=2+1=3	(1,3)

Ahora, hacemos nuestra tabla de valores con nuestros pares ordenados:

	-	0	
y	-		3

Una vez que tenemos nuestra tabla de valores, dibujamos unos ejes cartesianos y sobre él situamos nuestros puntos, teniendo siempre presente que la primera coordenada del punto corresponde con el valor en el eje X y la segunda con el del eje Y:

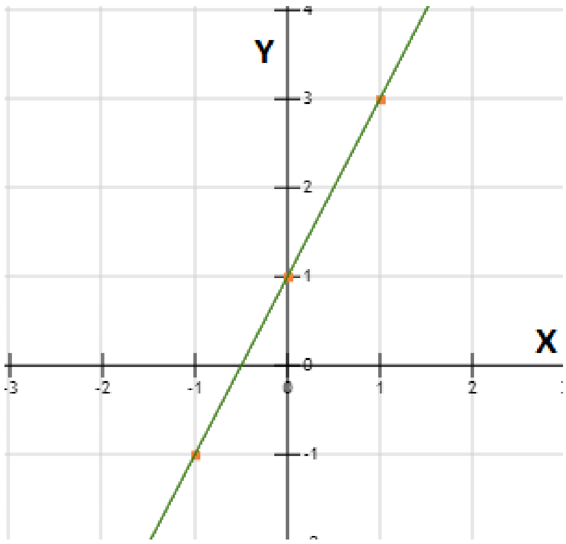


Imagen Nº 14. Gráfica. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

2.3.1. Características de las gráficas

a) Gráfica creciente

Una gráfica es creciente si al aumentar la variable independiente también aumenta la dependiente. Es decir, si aumenta el valor de la x también aumenta el valor de la y.

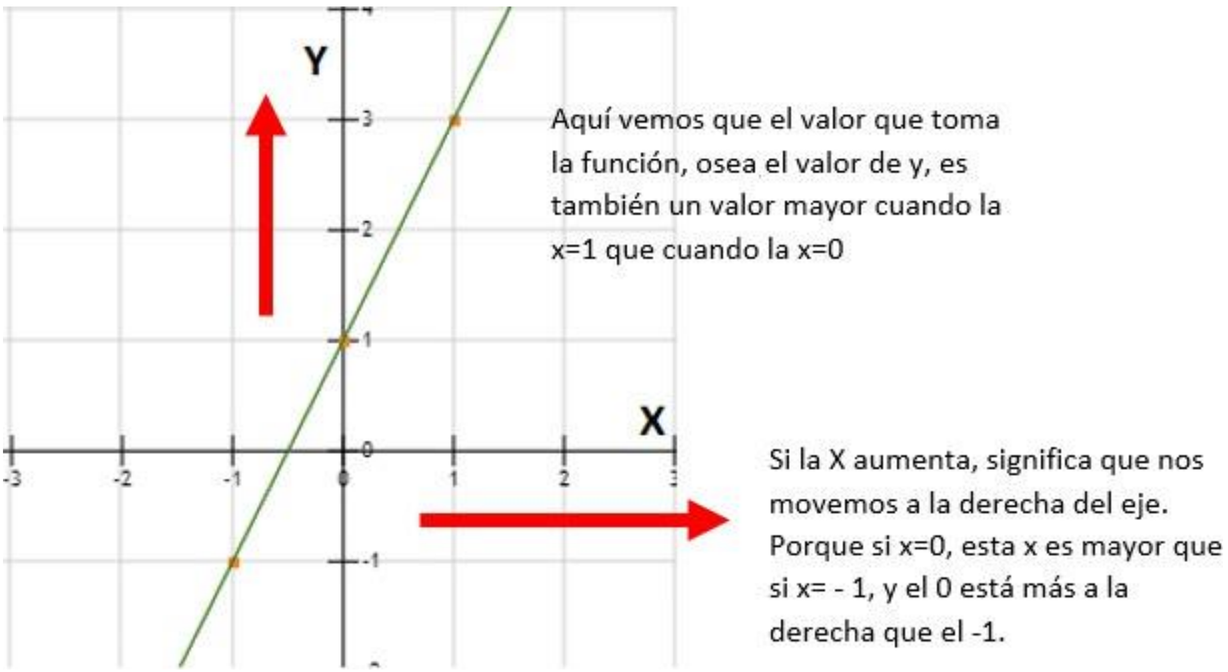


Imagen Nº 15. Gráfica Creciente. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

b) Gráfica decreciente

Una gráfica es decreciente si al aumentar la variable independiente disminuye la otra variable. Es decir, si aumentamos el valor de la x veremos que el respectivo valor de la y es menor que el anterior.

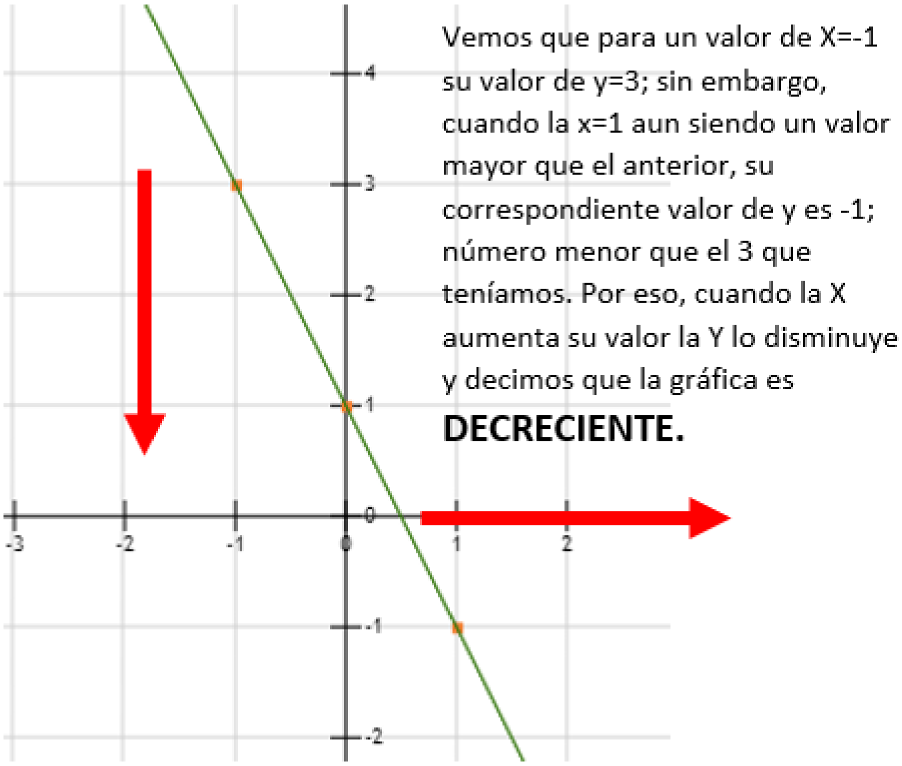


Imagen Nº 16. Gráfica Decreciente. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

c) Gráfica constante

Una gráfica es constante si al variar la variable independiente la otra permanece invariable (tiene siempre el mismo valor).

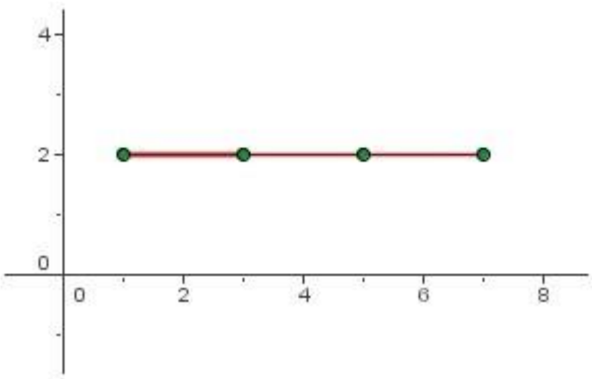


Imagen Nº 17. Gráfica Constante. Fuente: Imagen desconocida

Una gráfica puede tener a la vez partes constantes, crecientes y decrecientes.

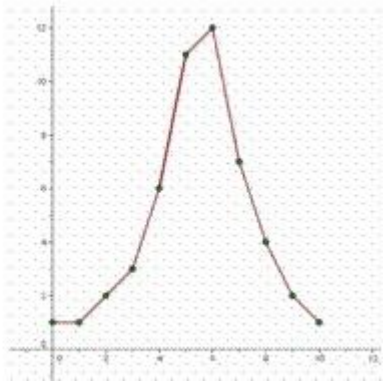


Imagen Nº 18. Gráfica. Fuente: Imagen desconocida

d) Máximos y mínimos.

Una función tiene un **MÁXIMO** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que están alrededor de él. A la izquierda del máximo la función es creciente, mientras que a su derecha la función decrece.

Una función tiene un **MÍNIMO** en un punto cuando su ordenada es menor que la ordenada de los puntos situados alrededor de él. A la izquierda del mínimo la función es decreciente, y a la derecha creciente.

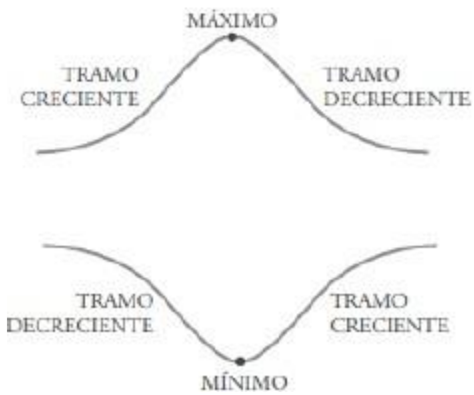


Imagen Nº 19. Máximos y mínimos. Fuente: Imagen desconocida

Por ejemplo, si tenemos una gráfica como la que hay a continuación, podemos estudiar en qué tramos la función es creciente, decreciente y si tienen máximos o mínimos.

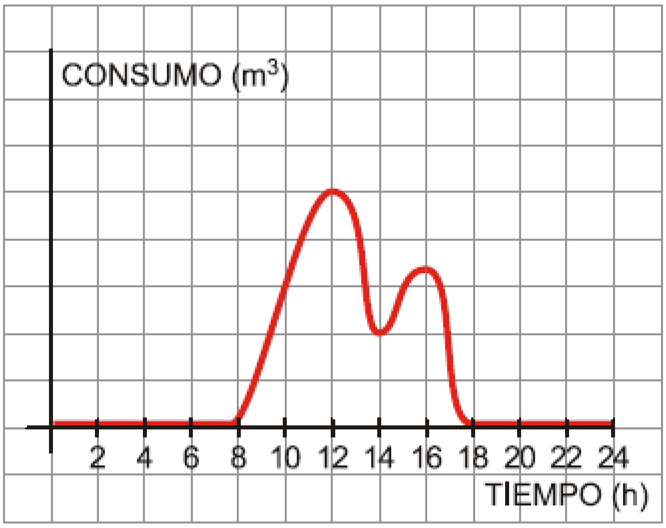


Imagen Nº 20. Gráfica.

Vemos que la gráfica presenta dos TRAMOS CONSTANTES, desde las 0h hasta las 8h y desde las 18h hasta las 24h. En ambos casos, el consumo de agua siempre se mantiene a cero. Por otro lado, tenemos otros dos TRAMOS CRECIENTES, desde las 8h a las 12h y desde las 14h a las 16h. Razonando de forma parecida, vemos que hay dos TRAMOS DECRECIENTES, desde las 12h a las 14h y desde 16h a las 18h. ¿Cómo escribimos eso de forma matemática?:

$$si\ x\ \epsilon(0,8)\cup(18,24)\ la\ funcion\ es\ CONSTANTE$$

$$si\ x\ \epsilon(8,12)\cup(14,16)\ la\ funcion\ es\ CRECIENTE$$

$$si\ x\ \epsilon(12,14)\cup(16,18)\ la\ funcion\ es\ DECRECIENTE$$

Si intentamos buscar los máximos y los mínimos, veremos que tenemos un consumo MÁXIMO de agua cuando son las 12h (consumiendo 5m^3), y corroboramos que a la izquierda de ese punto la función es creciente pero a su derecha es decreciente. Hay otro MÁXIMO a las 16h (consumiendo 3,25 m^3), pero como en esa hora el consumo es menor que a las 12 decimos que el MÁXIMO es RELATIVO. Si nos fijamos, cuando se cumplen las 14h hay un MÍNIMO (donde se consume 2 m^3), ya que a su izquierda la función decrece y a su derecha la función crece. Esto lo escribiríamos:

$$En\ x=12\ \exists\ un\ MAXIMO \rightarrow (12,5)$$

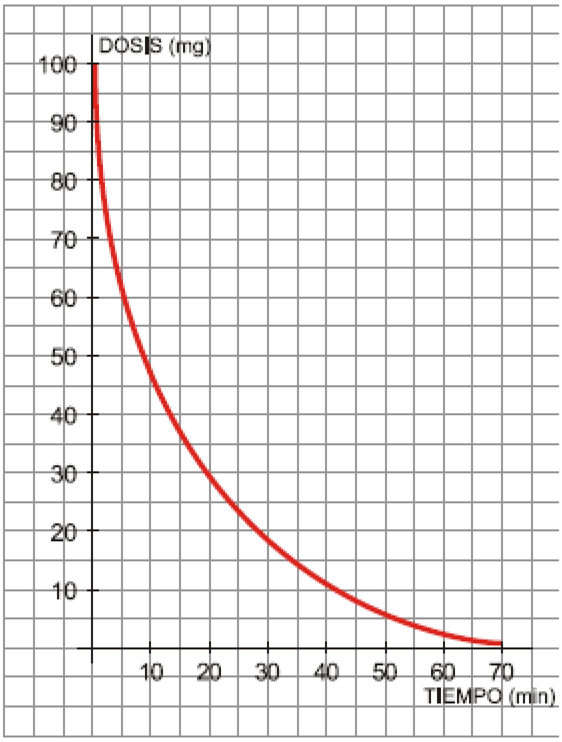
$$En\ x=16\ \exists\ un\ MAXIMO\ RELATIVO \rightarrow (16;\ 3,25)$$

$$En\ x=14\ \exists\ un\ MINIMO\ \rightarrow (14;\ 2)$$

e) Continuidad y discontinuidad.Una función es CONTÍNUA cuando la variable independiente y dependiente pueden tomar todos los valores que existen en un tramo de la recta real.

Por ejemplo, si representamos el precio que pagamos por la compra de patatas al peso, vemos que podemos comprar 1kg o 2kg de patatas, pero también las patatas pueden pesar todos los valores intermedios que hay entre 1 y 2.

Sin embargo, si en lugar de comprar las patatas al peso las compramos solo por unidades, nosotros sólo podemos comprar 1 o dos patatas, pero no los valores intermedios que hay entre ambos. Entonces decimos que la función es **DISCONTÍNUA**



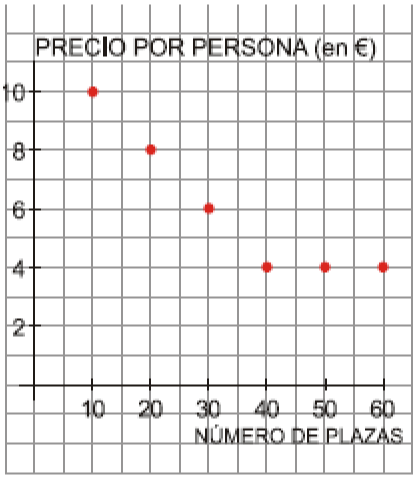


Imagen Nº 21. Gráficas.

gráfica CONTINUA gráfica DISCONTINUA

3. Interpretación de gráficas

Interpretar una gráfica implica extraer información analizando su comportamiento de **izquierda a derecha**, utilizando las características y detalles observados en la gráfica. Este proceso incluye:

- **Identificar Tendencias:** Observar cómo cambian las variables a medida que se mueve a lo largo de la gráfica.
- **Determinar Relaciones:** Comprender la relación entre la variable independiente (eje X) y la variable dependiente (eje Y).
- **Localizar Puntos Clave:** Identificar puntos específicos como intersecciones, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
- **Leer Escalas:** Interpretar las escalas de los ejes para obtener valores precisos.

Este análisis ayuda a comprender la dinámica y las interacciones entre las variables representadas en la gráfica.

Veamos cómo trabajar este apartado con un ejemplo.

EJEMPLO

Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica:

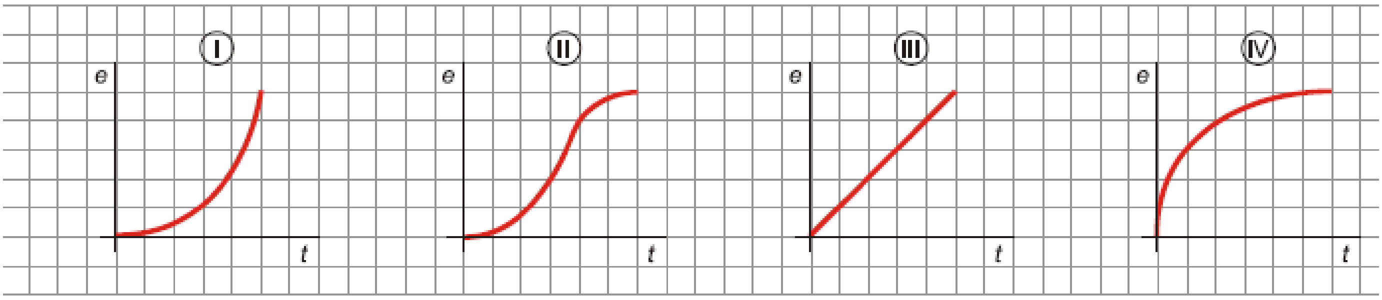


Imagen 23: Gráficas.

Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio.
Carlos: Empezó lentamente y fue aumentado gradualmente su velocidad.
Lourdes: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco.
Victoria: Mantuvo un ritmo constante.

La respuesta sería:

Mercedes →IV
Carlos→ I
Lourdes →II
Victoria→ III

Pero ¿por qué?. Que hemos tenido que pensar para responder así. Para eso lo primero que tenemos que hacer es fijarnos muy bien en las magnitudes que se representan en ambos ejes. Eneste caso es una gráfica espacio/tiempo, esto significa que puedo ver cómo avanzan en su recorrido conforme transcurre el tiempo. Así por ejemplo, la gráfica III corresponde a alguien que siempre ha corrido a la misma velocidad porque su avance es siempre igual: cada cuadrado en el eje X se corresponde con el mismo aumento en el eje Y. Por eso es la gráfica de Victoria.

La gráfica IV corresponde a alguien que al principio corre muy rápido porque en un solo cuadrado de avance en el eje x vemos que aumenta mucho la Y pero a partir del segundo cuadrado en la x vemos que la Y no crece al mismo ritmo que al principio. Es la que le corresponde a Mercedes.

Si nos fijamos bien, la gráfica I hace justamente lo contrario, al comienzo aumenta muy poco la Y pero después sube muy rápido. La de Carlos.

Y en la gráfica II el comienzo es el mismo o muy parecido a la de la gráfica I, pero llega un momento en el que el aumento del valor en el eje Y vuelve a "relajarse". Por este motivo, es la de Lourdes.

Veamos otro estilo de ejercicio posible:

La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de estudiantes, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia al instituto (en kilómetros):

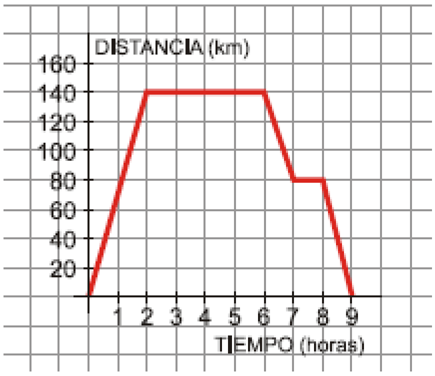


Imagen 24: Gráfica.

Se pide:

a. ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?
b. ¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?
c. ¿Hubo alguna parada a la ida? ¿Y a la vuelta?
d. ¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?

SOLUCIÓN:

. Para responder tenemos que fijarnos en el eje dónde se represente la distancia, en este caso es el Y. El mayor valor que se logre en la gráfica corresponde con la distancia al lugar, en este caso 140 km.

b. Si están visitando algún sitio, mientras están allí, no se alejan del instituto por lo que la distancia al centro de 140 km se mantiene constante. Por eso debemos buscar un tramo constante alejado lo máximo posible, ese tramo es desde la hora 2 a la 6; por tanto, están 4 horas visitando el lugar.

c. Mientras que se dirigen al lugar de visita la distancia al centro debe ir aumentando hasta que lleguen. Así vemos, que ese trayecto lo hacen sin ningún tramo constante, lo que significa que no hay paradas. Sin embargo, cuando vuelven, vemos que la distancia al centro disminuye y por eso la gráfica es decreciente, pero de la 7ª hora a la 8ª, la función no decrece sino que se mantiene constante; esto significa que hacen una parada a la vuelta de 1 hora de duración.

d. Aquí debemos fijarnos en el eje donde se representa el tiempo y ver cuál es la hora más alejada del principio; en nuestro caso tardan 9 horas en hacer todo el viaje.

A continuación, te representamos de nuevo la gráfica indicando en qué parte de la misma debemos mirar para responder a cada apartado:

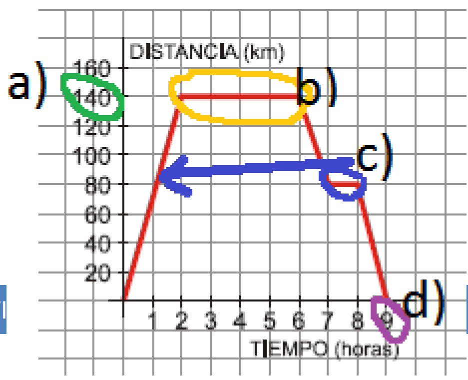


Imagen 25: Gráfica.

4. Función lineal

Una función lineal es una función en la que la relación entre dos variables se describe mediante un **polinomio de grado uno**. Su representación gráfica es una **recta**

Existen tres tipos de funciones lineales:

1. **Función de Proporcionalidad Directa:**
   - **Forma:** $y \quad mx$
   - **Características:** La gráfica es una recta que pasa por el origen (0,0). La pendiente de la recta es
2. **Función Afín:**
   - **Forma:** $y \quad x + n$
   - **Características:** La gráfica es una recta con pendiente m y ordenada al origen n. Esta función incluye la función de proporcionalidad directa como un caso especial.
3. **Función Constante:**
   - **Forma:** y
   - **Características** La gráfica es una recta horizontal en y . Es un caso particular de la función afín donde 0

Relaciones entre los tipos:

- La **función lineal** o de proporcionalidad directa ($y \quad mx$) es un caso particular de la función afín ($y \quad m \; + \;$) cuando 0
- La **función constante** ($y \quad n$) es un caso especial de la función afín donde la pendiente $m \quad 0$

4.1. Función lineal o de proporcionalidad directa

Comenzaremos estudiando la **FUNCIÓN LINEAL** o de **PROPORCIONALIDAD DIRECTA**

En estas funciones cada valor de “y” conserva una misma proporción respecto al de “x”. Es decir:

y = 3 x → (y es el triple de x)
y = -2 x → (y es el opuesto del doble de x)
y = x → (función identidad: y es igual a x)

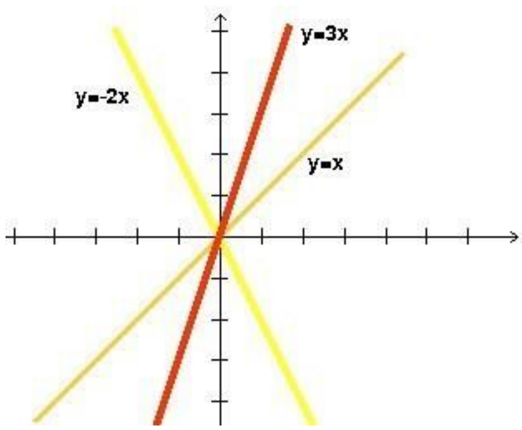


Imagen 28: Gráfica funciones lineales

Para identificar su gráfica lo tenemos muy fácil, tan sólo tenemos que darnos cuenta de que es una línea **recta que pasa por el origen de coordenadas**

Fíjate en la siguiente función: $y = 2x$. Tenemos su tabla de valores y su gráfica:

x	0		2	3	4
y = 2x	0	2	4	6	8

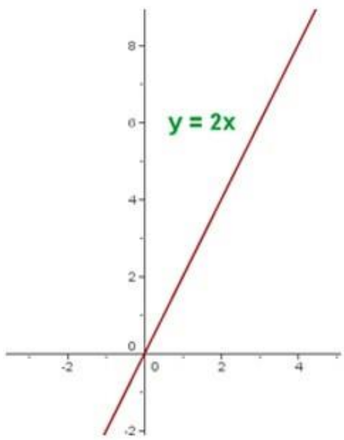


Imagen 29: Función lineal y tabla de datos.

Si nos damos cuenta, en su tabla de valores veremos que existe una relación de proporcionalidad entre el valor de la Y y el valor de la X:

$$\frac{VALOR\ Y}{VALOR\ X} = CONSTANTE = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

Pendiente

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. Expresa el aumento o la disminución de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente. Si la función nos la dan a través de su expresión algebraica podemos saber la pendiente fácilmente, ya que la identificamos como el coeficiente que acompaña a la X en la expresión. Así en la función y=2x el coeficiente que acompaña a la x es el 2 y por tanto la pendiente de esta función es m=2.

Observa que la pendiente la denominamos por la letra m.

Si m > 0 (esto significa: "si la pendiente es positiva") la función es CRECIENTE y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo. Sin embargo, si m < 0 (si la pendiente es negativa), la función es DECRECIENTE y ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso. En las funciones constantes, es decir, aquellas que son paralelas al eje x decimos que su pendiente es cero.

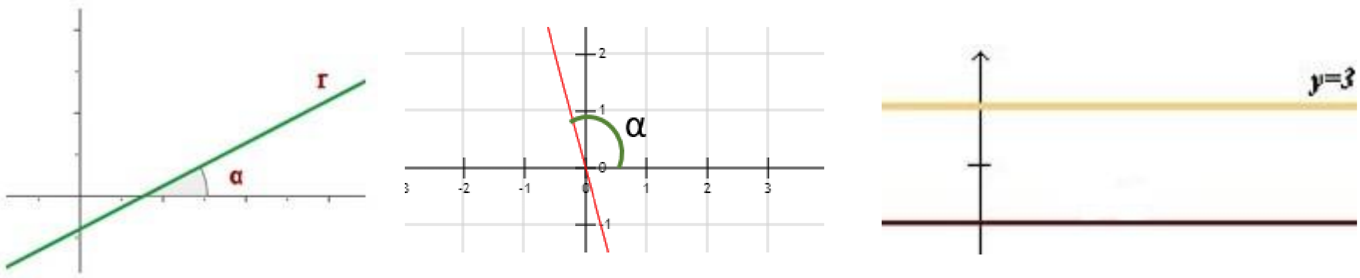


Imagen 30: Pendiente de la función lineal.

Función CRECIENTE m>0 — Función DECRECIENTE m<0 — Función CONSTANTE m=0

¿Qué nos indica la pendiente en una gráfica?. Pues ya hemos dicho que nos informa de la inclinación de la recta. Esto implica que aunque no sepamos a primera vista cómo obtener el valor numérico de la pendiente en una gráfica, podemos decir cuál de las rectas tendrá mayor o menor pendiente en función de la misma. Por ejemplo, supongamos que nos dan la siguiente gráfica con tres rectas representadas:

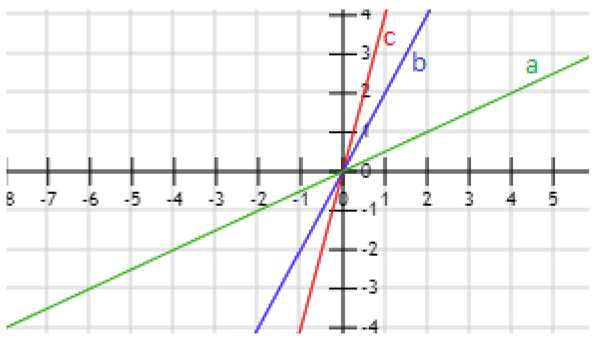


Imagen 31: Funciones lineales.

En ninguna de ellas vemos cuál es el valor numérico de su pendiente, pero podemos afirmar que como la recta c es la que tiene una mayor inclinación el valor de su pendiente será mayor que el de la b, y el de ésta mayor que el de la a. Además de decir que las tres son crecientes puesto que el ángulo que forman con la parte positiva del eje de abcisas es agudo; y por esa razón, las tres funciones lineales tendrán pendientes positivas.

Entonces, ¿no podemos saber el valor de la pendiente si no tenemos la expresión gráfica?. Pues claro que podemos. Simplemente tendremos que realizar algunos cálculos. Veamos cómo.

a) CÁLCULO DE LA PENDIENTE (m) SI SÓLO TENEMOS SU GRÁFICA:

En este caso, tenemos que obtener de la gráfica las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la recta. Con esos puntos que llamaremos A(x_1 , y_1) y B(x_2 , y_2); calculamos la pendiente aplicando la siguiente fórmula:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Aclarar que el símbolo Δ en matemáticas significa variación o incremento, por tanto, si tenemos escrito: Δy ; esto se leería como "variación de y". Esa variación representa la resta de dos cosas. Lo verás más claro con un ejemplo, si decimos que hoy la temperatura es de 23 ºC y ayer fue de 17ºC decimos que la variación de temperatura de ayer a hoy ha sido de 6 grados, porque 23-17=6. Esto llevado a las funciones, significaría la variación entre la ordenada de dos puntos pertenecientes a la recta.

Observa cómo se hace con un ejemplo:

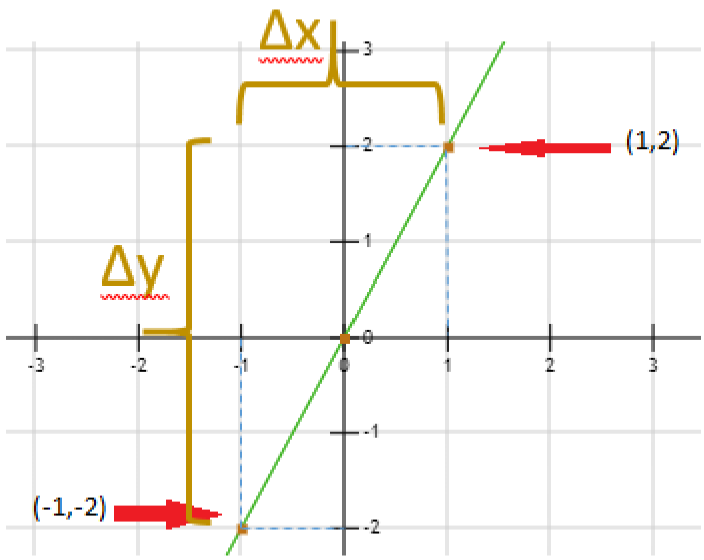


Imagen 32: Cálculo de la pendiente de una función lineal.

En la gráfica tenemos una recta creciente, es decir, con pendiente positiva, pero no sabemos cuál es su valor. Nos fijamos en la recta y escogemos dos puntos que nos resulten sencillos de obtener sus coordenadas, mirando con qué valor se corresponde ese punto para el eje X (primera coordenada) y para el eje Y (segunda coordenada). Así obtenemos los puntos: (-1,-2) y (1,2). Si aplicamos la fórmula obtenemos el valor de la pendiente, que en este caso sería m=2:

\[\]

b) CÁLCULO DE LA PENDIENTE (m) SI SÓLO TENEMOS DOS PUNTOS QUE PERTENECEN A LA RECTA:En este caso nos ahorramos el paso de tener que mirar en la gráfica y obtener los puntos de ella. Por lo demás procederemos como antes. Al tener dos puntos podemos aplicar la fórmula de la pendiente.

RESUMIENDO

1. Las funciones lineales o de proporcionalidad directa son de la forma y=mx, donde m es la pendiente de la recta.

2. Si m>0 la función es creciente

3. Si m<0 la función es decreciente

4. Todas las funciones lineales pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0,0) pertenece a todas las funciones lineales.

5. Para calcular el valor de la pendiente a partir de la gráfica o a partir de dos puntos de la recta debemos aplicar:

\[\]

6. Si nos dan la expresión algebraica de la función, la pendiente la vemos directamente en el valor del número que acompaña a la X.

Caso práctico

EJERCICIO 16

En las siguientes funciones indica cuál es su pendiente y además en función de la misma especifica si la función es creciente o decreciente:

a) y=3x b) y= -x

SOLUCIÓN

a) m=3 > 0 F. CRECIENTE

b) m= -1 < 0 F.

Caso práctico

EJERCICIO 17

En la siguiente representación indica qué tipo de funciones hay razonando matemáticamente tu respuesta y además escribe cuál de esas rectas es la de mayor pendiente justificando tu respuesta.

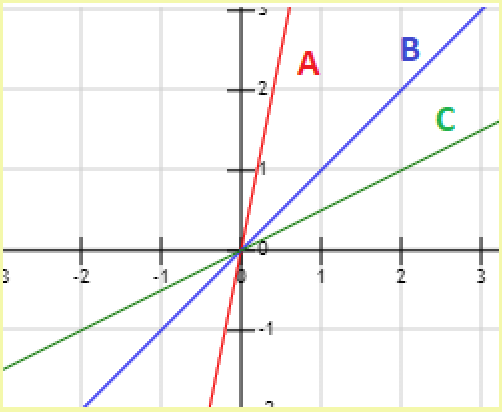


Imagen 33: Funciones lineales.

SOLUCIÓN

Las tres rectas serían funciones lineales porque todas ellas pasan por el origen de coordenadas, el punto (0,0).

La que posee mayor pendiente es la recta A, ya que es la que tiene mayor inclinación respecto al eje de abcisas.

4.2. Función afín

La función afín es del tipo: **y = mx + n**, donde m es la pendiente de la recta y n es la **ORDENADA EN EL ORIGEN,** ésta es el punto en el que corta la recta al eje Y, y lo escribimos como un punto (0, n).

Observa en la siguiente gráfica:

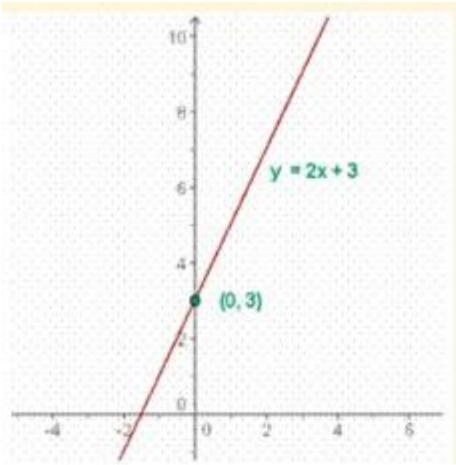


Imagen 35: Función lineal.

El punto en el que la recta corta al eje Y es el punto (0,3); y este punto es la ordenada en el origen de la función y=2x+3. Si te fijas en la expresión algebraica de la función, n=3 y m=2; por tanto, la pendiente de la función es 2 y la coordenada y de la ordenada en el origen es 3.

Cabe destacar que en las funciones afines no se cumple la proporcionalidad directa que hemos visto en las anteriores. Veamos un ejemplo:

Metros cúbicos de agua consumida	1	3	5	10	15	…	x
Precios de la factura sin IVA	13	19	25	40	55	…	$3x+10$

En la tabla podemos comprobar que no se cumple una proporción directa entre los valores de y y los de x; es decir:

$$\frac{13}{1} \neq \frac{19}{3} \neq \frac{25}{5} \neq \frac{40}{10} \neq \frac{55}{15}$$

En este caso, si representamos los pares ordenados de la tabla, obtenemos la siguiente gráfica:

Imagen 36: Gráfica función lineal del consumo de agua.

La gráfica es una recta que comienza en el punto (0,10) y por tanto éste es la ordenada en el origen. Así podemos saber que la expresión matemática de esta función es de la forma: y=mx+10. Si interpretamos la gráfica, esto significa que con un consumo cero de agua tendremos que pagar de todos modos 10€. Por tanto, lo que pagamos por el agua no es proporcional a lo que consumimos, sino que siempre hay una cantidad fija (10€) que tendremos que pagar independientemente de lo que consumamos.

¿Cómo obtenemos el valor de m?. Pues aplicando la fórmula de la pendiente que ya hemos visto. Si lo hacemos obtenemos que la pendiente es 3:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-40}{5-10}=\frac{-15}{-5}=3$$

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente y por tanto, el coeficiente que acompaña a la X será el mismo:

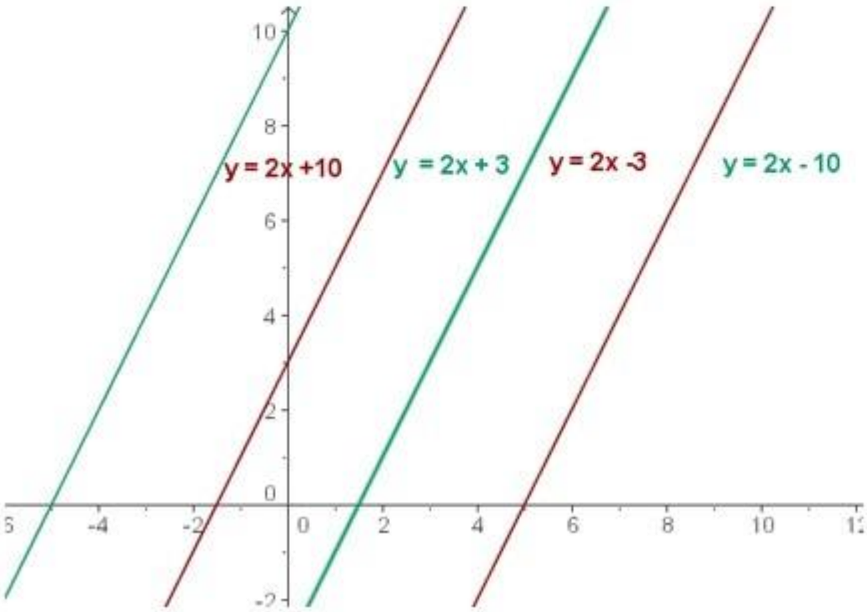


Imagen 37: Gráficas de funciones lineales paralelas.

Para representar una función afín, daremos unos valores a X y calcularemos los correspondientes valores de Y, una vez que tengamos dichos valores los representaremos en los ejes de coordenadas y uniremos los puntos con una recta.

RESUMIENDO

1. Todas las funciones afines son de la forma y= mx+n.

2. El valor de la m es la pendiente de la recta.

3. El valor de n es la ordenada en el origen; es decir, la recta corta al eje Y en el punto (0,n)

4. Si m>0 la función es creciente; mientras que si m<0 es decreciente. (Igual que en las de proporcionalidad directa)

5. Ninguna función afín pasa por (0,0)

6. Para calcular el valor de la pendiente conocidos dos puntos pertenecientes a la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

7. Diferentes rectas serán paralelas si tienen el mismo valor de m, es decir, de la pendiente.

Caso práctico

EJERCICIO 21

Escribe el valor de la pendiente y describe el crecimiento para cada una de las funciones del ejercicio 20.

SOLUCION

a) m= 1 > 0 creciente

b) m= -2 < 0 decreciente

4.3 Función constante

La función constante es una función lineal donde el valor de m es cero, y por tanto es de la forma **y=n**, y como tal, representa una recta paralela al eje de abscisas debido a que para cualquier valor de la X le corresponde siempre el mismo valor para la Y, siendo ese valor n.

Veamos, si la función es y=5 la representación será una recta paralela al eje X y que pase por el punto (0,5):

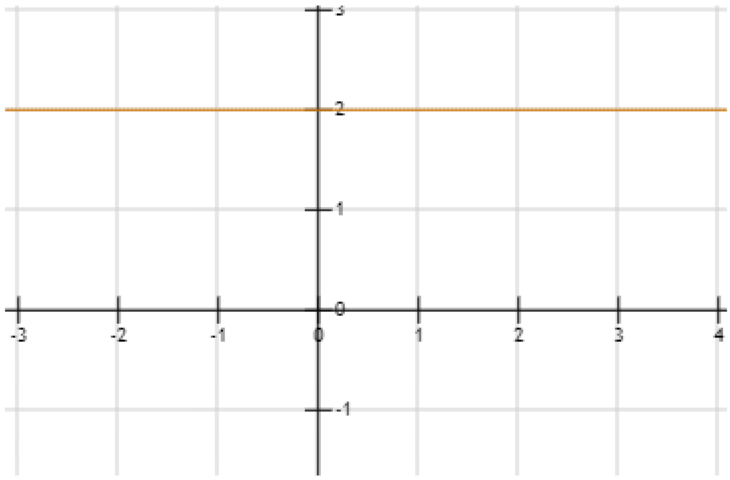


Imagen 38: Gráfica función constante.

4.4. Aplicaciones de la función lineal

Las funciones lineales y afines son herramientas muy útiles en diversos contextos, desde la economía hasta situaciones cotidianas. Por ejemplo, en economía, se utilizan para modelar funciones de costo y demanda; en medicina, como en el experimento psicológico de Sternberg; en la vida diaria, como al pagar por la cantidad de fruta que compramos o el tiempo en un parking.

Para relacionar estas situaciones con funciones lineales, sigue estos pasos:

1. **Identificar el Tipo de Función:**
    - **Proporcionalidad Directa:** y
    - **Función Afín:** $y \quad mx + n$
    - **Función Constante:** y
2. **Determinar las Magnitudes:**
    - **Variable Independiente (x):** La variable que se controla o cambia.
    - **Variable Dependiente (y):** La variable que cambia en función de la independiente.
3. **Escribir la Expresión de la Función:** Basado en la relación observada.

Ejemplo: Comparación de Compañías de Móvil

Supón que estás eligiendo entre dos compañías de móvil:

- **Compañía A:** Pago fijo de 15€ al mes más 0,05€ por cada minuto de conversación.
- **Compañía B:** Pago de 0,25€ por cada minuto de conversación, sin pago fijo.

Queremos determinar cuál es más beneficiosa si hablas menos de 60 minutos al mes.

1. **Definir las Variables:**
    - **Variable Independiente (x):** Minutos de conversación.
    - **Variable Dependiente (y):** Costo total.
2. **Escribir las Funciones:**
    - **Compañía A:** $y \quad 0\ 05x + 15$
    - **Compañía B:** $y \quad 0\ 25x$
3. **Calcular el Costo para 60 Minutos:**
    - **Compañía A:**

$$y \quad 0\ 05 \quad 60 + 15 \quad 3 + 15 \quad 18€$$

    - **Compañía B:**

$$y \quad 0\ 25 \quad 60 \quad 15€$$

La **Compañía B** es más económica si hablas menos de 60 minutos al mes.

Por otro lado, una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** también representa una función lineal. Por ejemplo, consideremos la ecuación:

$$9 \quad + 3y \quad 18$$

Para convertir esta ecuación a la forma de una función lineal $y \quad m \quad +$, sigue estos pasos:

1. **Despeja y**

$$9 \quad + 3y \quad 18$$

Primero, resta $9x$ de ambos lados de la ecuación:

$$3y \quad 18 \quad 9$$

Luego, divide todo entre 3 para resolver y

$$y \quad \frac{18 \quad 9}{3}$$

Simplifica:

$$y \quad 3x + 6$$

Función Afín: La ecuación $y \quad 3x + 6$ es una función afín, ya que está en la forma $y \quad x + n$ donde 3 (la pendiente) y 6 (la ordenada al origen).

En resumen, cualquier ecuación de primer grado con dos incógnitas se puede expresar en la forma de una función lineal, que puede ser una función lineal general o afín dependiendo de los términos.

Obtención de la Ecuación de la Recta Conocida la Pendiente y un Punto

Para encontrar la ecuación de una recta cuando conoces su pendiente mm y un punto $(x_0 \ y_0)$(x0 y0) que pertenece a ella, puedes usar la fórmula de la **ecuación de la recta en forma punto-pendiente**

$$y \quad y_0 \quad m \ (x \quad _0)$$

Donde:

- m es la pendiente de la recta.
- $(x_0 \ y_0)$ son las coordenadas de un punto en la recta.

Ejemplo:

Supongamos que queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2 \ 4)$(2 4) y tiene una pendiente de 3. Aquí, $m \quad 3$m 3 y $(x_0 \ y_0) \quad (2 \ 4)$(x0 y0) (2 4). Sustituyendo estos valores en la fórmula:

1. **Sustitución en la fórmula:**

$$y \quad 4 \quad 3\ (\qquad 2)$$

2. **Desarrolla la ecuación:**

$$y \quad 4 \quad 3x \quad 6$$
$$y \quad 3 \qquad 6+4$$
$$y \quad 3x \quad 2$$

Ecuación de la recta: y 3x 2

Cuando se Te Dán Dos Puntos:

Si se te proporcionan dos puntos en la recta, primero calcula la pendiente m usando:

$$m \quad \frac{y_2 \quad y}{x_2 \qquad _1}$$

Luego, usa la fórmula de la ecuación de la recta con la pendiente calculada y uno de los puntos.

Ejemplo Adicional:

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2 \;\; 4)$ y $(1 \;\; 1)$

1. **Calcula la pendiente** m

$$m \quad \frac{\quad 4}{\quad 2} \quad \frac{3}{1} \quad 3$$

2. **Usa la fórmula punto-pendiente con** $(2 \;\; 4)$ **y** $m \quad 3$

$$y \quad 4 \quad 3\ (\qquad 2)$$
$$y \quad 4 \quad 3x \quad 6$$
$$y \quad 3 \qquad 6+4$$
$$y \quad 3x \quad 2$$

Ecuación de la recta: y 3x 2

Esta metodología te permite encontrar la ecuación de una recta de manera sistemática usando la información disponible.

Caso práctico

EJERCICIO 26

En una entrevista de trabajo para vendedor de revistas a domicilio, se ofrece un sueldo fijo mensual de 500 euros más 0,50 euros por cada revista vendida. Se pide:

a) Escribe la función correspondiente y el tipo de función que es.b) ¿Qué sueldo cobrará un trabajador que ha vendido 20 revistas en el último mes?

SOLUCIÓN

a) $y = 500 + 0.50\,x$ Es una función afín.

b) $f(20) = 500 + 0{,}50 \cdot 20 = 500 + 10 = 510$€

5. Función cuadrática

Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado de la forma:

$$y \quad f(x) \quad ax^2 + bx + c$$

donde:

a b, y c son **coeficientes**
x es la **variable independiente**
y o $f(x)$ es la **variable dependiente**

Características Clave de la Función Cuadrática

1. **Forma de la Gráfica:**

   La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola**

2. **Coeficientes:**

   Determina la **concavidad** o **orientación** de la parábola.
   Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
   Si 0, la parábola se abre hacia abajo.
   b y c: Afectan la **posición** de la parábola respecto a los ejes de coordenadas.

3. **Vértice y Eje de Simetría:**

   El vértice de la parábola es el punto más alto o más bajo, dependiendo de la orientación.
   El eje de simetría es una línea vertical que pasa por el vértice. Si b 0, el vértice está sobre el eje y y este eje es el eje de **simetría de la parábola.**

Ejemplo

Para la función cuadrática:

$$y \quad 2 \ ^2 + 3 \quad 10$$

Coeficientes:

 2
b 3
c 10

Aquí, a 2 indica que la parábola se abre hacia arriba. Los valores de b y c afectan la posición de la parábola en el plano cartesiano.

El valor del coeficiente **a** afecta a la concavidad u orientación de la parábola. Mientras que los otros dos coeficientes, afectan a la posición que posee la parábola respecto de los ejes de coordenadas. De forma que si el valor de **b=0** significa que el vértice de la parábola se encuentra sobre el eje y; y dicho eje es el de simetría de la parábola:

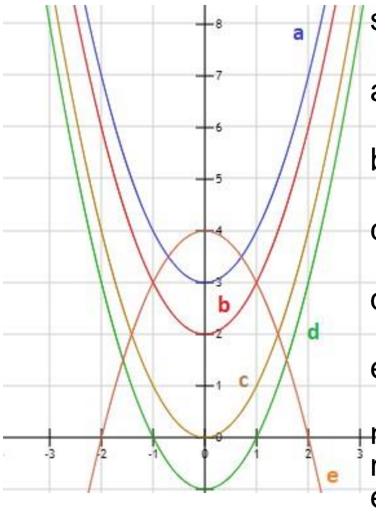


Imagen 40: Funciones cuadráticas con coeficiente b=0

Si vemos la representación asociada a cada expresión algebraica siguiente:

a: $y=x^2+3$

b: $y=x^2+2$

c: $y= x^2$

d: $y=x^2-1$

e: $y= - x^2+4$

nos damos cuenta de que en todas estas expresiones la **b=0** y en sus representaciones gráficas, el vértice está sobre el eje y cortándolo por el valor correspondiente a su n

Pensando de forma parecida, si el valor del coeficiente **c=0**, esto significa que la parábola siempre pasará por el punto (0,0). Veámoslo:

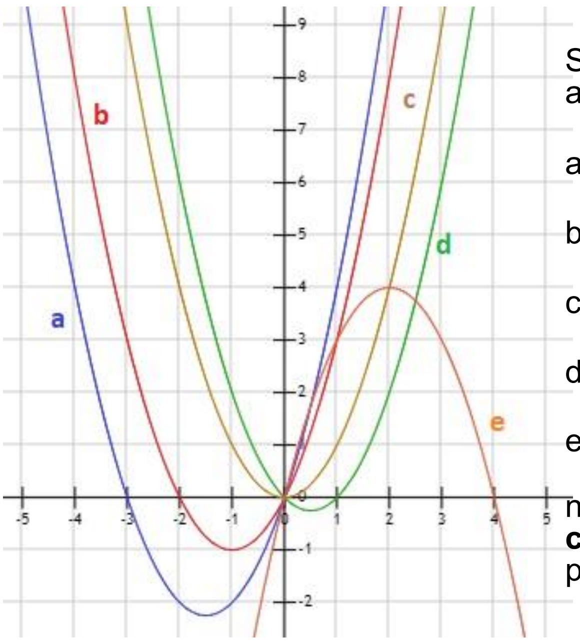


Imagen 41: Funciones cuadráticas con coeficiente c=0

Si vemos la representación asociada a cada expresión algebraica siguiente:

a: $y=x^2+3x$

b: $y=x^2+2x$

c: $y= x^2+x$

d: $y=x^2-x$

e: $y= - x^2+4x$

nos damos cuenta de que en todas estas expresiones la **c=0** y en sus representaciones gráficas, todas pasan por el punto (0,0)

Caso práctico

EJERCICIO 27

Identifica los coeficientes a,b y c de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x)=3x^2+5x-10$ b) $f(x)= -2x^2+3x+8$ c) $y=-x^2-4x+5$

SOLUCIÓN

a) a=3 b=5 c= -10 b) a=-2 b=3 c=8 c) a=-1 b=-4 c=5

ORIENTACIÓN O CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA:

Como hemos dicho, cuando dibujamos la gráfica de una función cuadrática obtenemos una parábola. Esta parábola la podemos dibujar de dos posiciones:

Orientación o Concavidad de la parábola

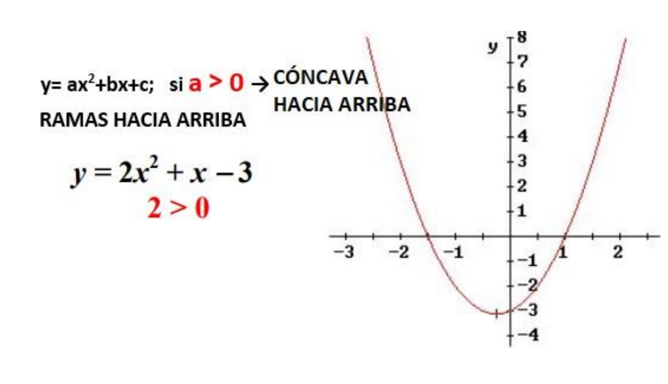
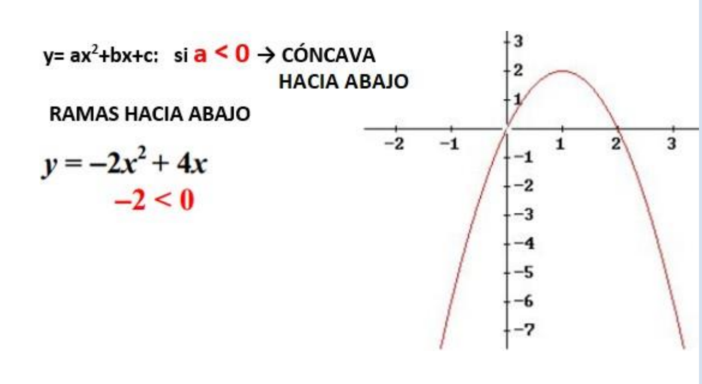
FUNCIÓN CÓNCAVA HACIA ARRIBA	FUNCIÓN CÓNCAVA HACIA ABAJO
	

Imagen 42: Concavidad de las Parábolas.

Además, si nos fijamos en el valor del coeficiente a, veremos que cuanto mayor es su valor absoluto más estrechas o cerradas son las ramas de la parábola.

5.1. Elementos de la parábola

En una gráfica de una parábola, además de su concavidad, se pueden observar los siguientes elementos clave:

1. **Eje de Simetría:**
   - Es una **línea vertical** (paralela al eje y) que divide la parábola en dos partes iguales. Pasa por el vértice de la parábola.
2. **Vértice:**
   - Es el **punto más alto** o **más bajo** de la parábola, dependiendo de si se abre hacia arriba o hacia abajo. Es el punto donde la parábola cambia de dirección.
3. **Corte con el Eje Y**
   - Es el **punto** donde la parábola cruza el eje vertical y. Se obtiene al evaluar la función cuadrática cuando x 0
4. **Cortes con el Eje X**
   - Son los **puntos** donde la parábola cruza el eje horizontal xx. Pueden ser:
     - **Dos puntos:** Si la parábola cruza el eje x en dos lugares diferentes.
     - **Uno:** Si la parábola toca el eje x en un único punto (esto se llama un **punto de tangencia**).
     - **Ninguno:** Si la parábola no cruza el eje x (esto ocurre si el discriminante de la ecuación cuadrática es negativo).

Utilidad

Estos elementos permiten dibujar la parábola de manera efectiva sin necesidad de calcular una gran cantidad de puntos. Conocer el eje de simetría, el vértice, y los puntos de intersección con los ejes facilita la representación gráfica precisa de la función cuadrática.

Estos elementos me permiten, una vez calculados, dibujar la parábola sin tener que calcular una infinidad de puntos en una tabla de valores.

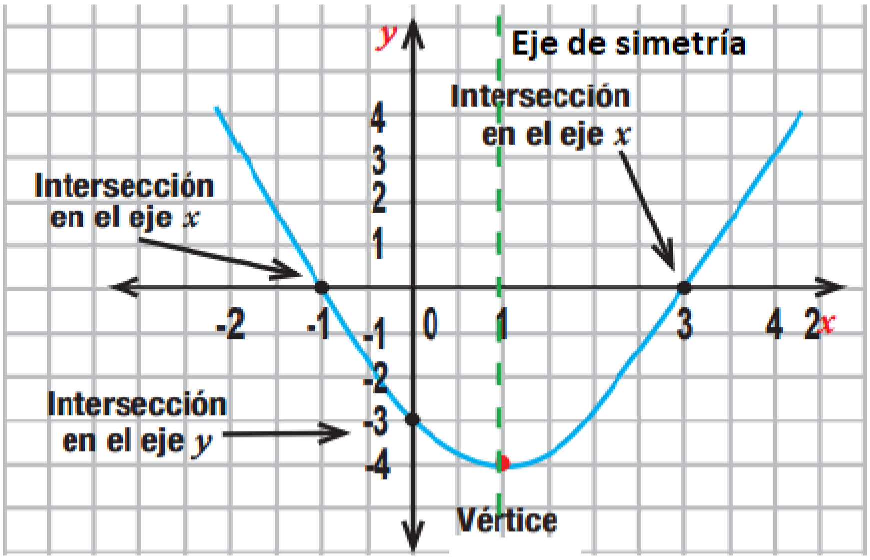


Imagen 43: Elementos de una parábola.

EJE DE SIMETRÍA:

Es una recta vertical, paralela al eje Y que divide la parábola en dos de forma que cada rama de la parábola, es el reflejo de la otra. La forma de obtener la ecuación de esta recta es:

$$x=\frac{-b}{2a}$$

Observa cómo podemos determinar el eje de simetría de la siguiente función: $f(x)=x^2-4x+3$.

Como a=1, b=-4 y c=3 calculamos la ecuación de la recta del eje de simetría sustituyendo en la expresión:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2\rightarrow x=2$$

Por tanto, el eje de simetría de la función $f(x)=x^2-4x+3$ es x=2. CUIDADO: fíjate bien que el eje de simetría es una recta, y por tanto la tienes que escribir como tal **X=2;** y no como un número real cualquiera.

VÉRTICE:

En una función cuadrática hay una rama que crece y otra que decrece; el punto dónde se produce ese cambio lo llamamos VÉRTICE; y es el máximo o mínimo valor que toma la función según sea cóncava hacia arriba o hacia abajo. Además es el punto dónde se cortan la parábola y el eje de simetría; y por tanto, comparten el mismo valor en la coordenada x. Así para calcular la coordenada del eje x del vértice usamos la misma expresión; pero además como el vértice es un punto necesitamos obtener la otra coordenada, ¿cómo?, pues calculando el valor de la función para la x_V

$$x_v=\frac{-b}{2a};\ \rightarrow y_v=f(x_v)=ax_v^2+bx_v+c$$

Si seguimos con la función f(x)=x^2-4x+3:

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2\rightarrow x_v=2;\ \rightarrow y_v=f(2)=1\cdot 2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1\rightarrow v(2,-1$$

Si vamos representando poco a poco lo que vamos calculando, de momento nuestra representación sería:

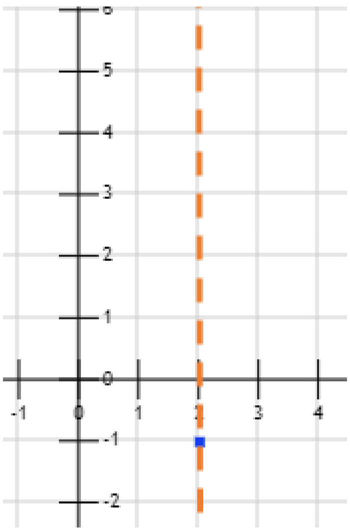


Imagen 44: Eje de simetría de una parábola.

CORTE CON EL EJE Y:

Éste será un punto donde la parábola corta el eje de ordenadas. Para determinarlo lo que haremos será sustituir la X de la expresión de la función por el valor cero; por tanto, lo que haremos será calcular el valor de la función cuando x=0. Evidentemente, si la forma de la función cuadrática es f(x)= ax^2+bx+c; si x=0 → f(0)=a· 0^2 + b·0 + c =0+0+ c = c. Así pues el punto de corte con el eje y siempre será de la forma:

CORTE CON EJE y →(0,C)

Así, si continuamos con nuestro ejemplo f(x)=x^2-4x+3 escribiríamos:

si x= 0 → f(0)= 0^2 -4·0+3 = 3; por lo que el punto de corte con el eje y será (0,3).

CORTE CON EL EJE X:

Son los puntos donde la parábola corta al eje de abscisas. Para poder obtener esos puntos tenemos que igualar la función a cero, es decir, si y=0 calcular los valores de x para los que se cumple esa condición. Cuando hacemos esto, obtenemos una ecuación de segundo grado, por lo que para calcular los valores que igualan esa ecuación de segundo grado a cero tenemos que aplicar la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$$

Como recordarás de cursos anteriores, cuando resolvemos una ecuación de segundo grado se nos pueden presentar tres casos:

Que tenga dos soluciones. Esto ocurre cuando su discriminante (llamamos así al valor de lo que hay "dentro" de la raíz) es positivo. Es decir, b^2-4ac >0 → 2 SOLUCIONES = DOS PUNTOS DE CORTE CON X→ (X_1,0) y (X_2, 0)
Que tenga una sola solución. Sucede si el discriminante posee valor cero. Es decir; b^2-4ac = 0 → 1 SOLUCIÓN = UN PUNTO DE CORTE CON X (X_1,0)

- Que NO tenga solución. Sólo ocurre cuando el valor del discriminante es negativo. b^2-4ac < 0 → NO TIENE SOLUCIONES, por tanto, no corta al eje x.

En el ejemplo f(x)=x^2-4x+3 haríamos lo siguiente:

CORTE CON x: y=0 → x^2-4x+3 =0

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\rightarrow x_1=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3;\quad x_2=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado que se forma son: x_1=3 y x_2=1; por tanto, los puntos de corte con el eje x serán: (3,0) y el (1,0)

CUIDADO: Fíjate bien que los puntos de corte con el eje x tienen la coordenada del eje y cero: **(X ,0) y (X_2, 0)**

CORTE CON EL EJE X

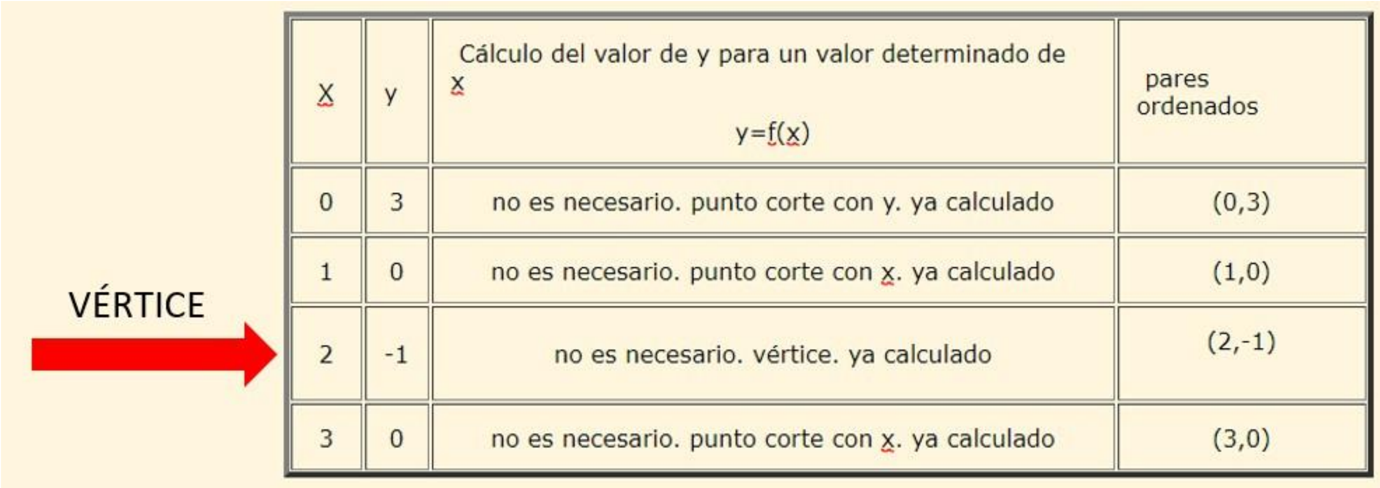
TABLA DE VALORES DE UNA PARÁBOLA:

Antes de representar una función cuadrática debemos ordenar los datos que hemos ido obteniendo y la mejor manera de hacerlo es con una tabla de valores. Para poder representarla lo más fielmente posible necesitaremos al menos cinco valores, dos correspondientes a cada rama y otro que sería el vértice. Pero qué pasa si no tenemos suficientes puntos de la parábola, o si nos piden más puntos de los que podemos calcular. Pues entonces procedemos como en las funciones lineales, vamos calculando diferentes valores de la función para diferentes valores de X. Lo único que debemos procurar es buscar valores de X que estén a ambos lados del eje de simetría, porque sino es asi sólo podremos dibujar una rama correctamente.

Veamos, en la función con la que estamos trabajando f(x)=x^2-4x+3 hemos obtenido los siguientes datos:

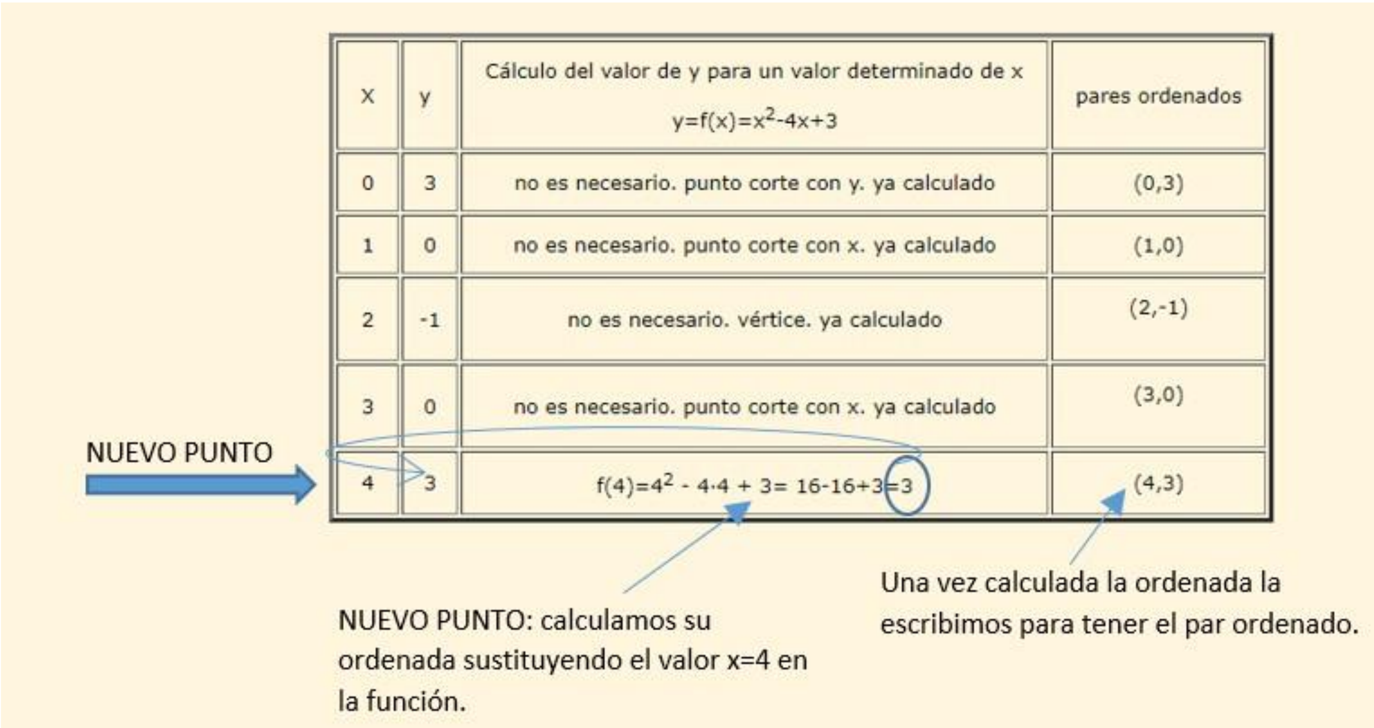
- EJE DE SIMETRÍA → x= 2
  VÉRTICE → V(2,-1)
  CORTE CON EJE Y → (0,3)
- CORTE CON EJE X → (3,0) y (1,0)

Si ordenamos estos puntos en una tabla de valores vemos que sólo tenemos cuatro valores, si pudiéramos dibujar siete valores nos resultaría más sencillo trazar las ramas de la parábola. Veamos cómo se nos quedaría la tabla de valores:



x	y	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x y=f(x)	pares ordenados
0	3	no es necesario. punto corte con y. ya calculado	(0,3)
1	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(1,0)
2	-1	no es necesario. vértice. ya calculado	(2,-1)
3	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(3,0)

Cómo elegir los valores de x para completar una tabla de siete pares ordenados. Pues una opciónes fijarnos en la coordenada x del vértice (en nuestro caso, esta coordenada es $x_V=2$); si ordenamos en la tabla de valores, las x de menor a mayor, observamos que tenemos dos puntos por debajo pero sólo uno mayor que x=2. Así que elegiremos un valor de x mayor de 2; por ejemplo x=4:



x	y	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x $y=f(x)=x^2-4x+3$	pares ordenados
0	3	no es necesario. punto corte con y. ya calculado	(0,3)
1	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(1,0)
2	-1	no es necesario. vértice. ya calculado	(2,-1)
3	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(3,0)
4	3	$f(4)=4^2 - 4\cdot4 + 3= 16-16+3=3$	(4,3)

Ya tenemos cinco puntos de la parábola, pero dijimos anteriormente que es mucho mejor tener al menos siete puntos, así que nos faltarían dos más. Lo suyo es intentar elegir uno de cada rama. Por eso, podemos optar por x=-1; que estaría por debajo del valor de la coordenada $x_V=2$ y por x=5 que estaría por encima. Realizando los cálculos de forma similar, tendríamos:

X	y	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x $y=f(x)=x^2-4x+3$	pares ordenados
-1	**8**	$f(-1)= (-1)^2 -4\cdot(-1) +3= 1+4+3=8$	**(-1,8)**
0	3	no es necesario. punto corte con y. ya calculado	(0,3)
	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(1,0)
2	-1	no es necesario. vértice. ya calculado	(2,-1)
3	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(3,0)
4	3	$f(4)=4^2 - 4\cdot4 + 3= 16-16+3=3$	(4,3)
5	**8**	$f(5)= 5^2 -4\cdot5 +3= 25 - 20 +3=8$	**(5,8)**

REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA:

Ya sabemos que su gráfica tiene forma de parábola, así pues lo primero que haremos será llevar a unos ejes de coordenadas todos los puntos que tenemos y hemos calculado y que pertenecen a la misma; y luego los uniremos formando dos ramas a partir del vértice dándoles cierta curvatura:

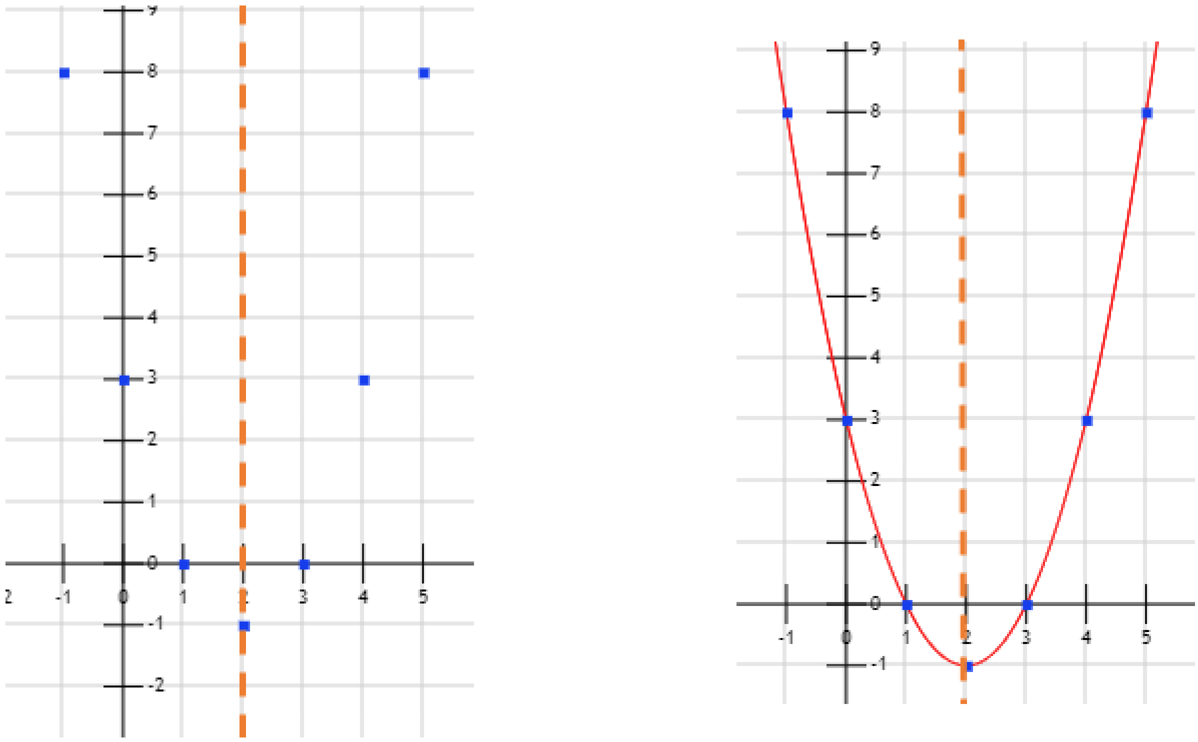


Imagen 45: Representación de una función cuadrática.