Modulo 2 ACT. Tema 10:

Lenguaje Algebraico. Ecuaciones Lineales

INDICE

INTRODUCCIÓN

Ya sabemos que una **expresión algebraica** es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones para reflejar, de forma generalizada, la relación que existe entre varias magnitudes y poder así realizar un cálculo de esa relación en función de los valores que tomen las diferentes magnitudes. Observa los siguientes ejemplos de expresiones algebraicas:

Diferencia de dos números: **a - b**

Doble de un número menos triple de otro: **2x - 3y**

Suma de varias potencias de un número: $x^4 + x^3 + x^2 + x$

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Recuerda que no siempre se conoce el valor de todos los elementos de una igualdad. Cuando eso ocurre se nos origina una **ecuación**, que es una igualdad con números y letras que expresa una condición que deben cumplir esas letras para ser cierta. A las letras que aparecen en la ecuación se les llama **incógnitas**.

Las ecuaciones con una sola letra con exponente 1 se conocen como ecuaciones de primer grado.

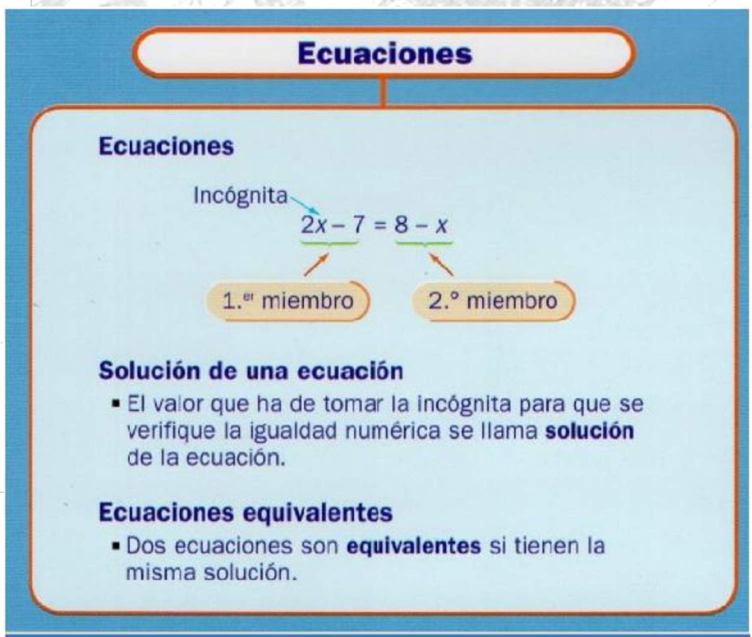


Imagen 1. Elementos ecuaciones

1.1 Pasos para resolver una ecuación de primer grado

1- Eliminación de denominadores:

Si existen denominadores se eliminarán aplicando el procedimiento del mínimo común múltiplo (m.c.m). Es decir, se halla el mínimo común múltiplo de todos los denominadores y éste se divide entre cada denominador antiguo, multiplicando después ese resultado por su respectivo numerador.

$$\frac{x}{4}+\frac{5}{2}-\frac{x}{6}=5$$

Calculamos el m.c.m de los denominadores (2, 4 y 6), cuyo valor es 12. Ahora multiplicamos todos los numeradores por el m.c.m.

$$\frac{12x}{4}+\frac{12*5}{2}-\frac{12x}{6}=12*5$$

A continuación, quitamos los denominadores realizando las divisiones:

$$3x+30-2x=60$$

Una vez eliminados los denominadores, se continúa con los siguientes pasos.

2- Eliminación de paréntesis:

Si existen paréntesis se opera para eliminarlos, teniendo buen cuidado de ir multiplicando los signos correspondientes. Para ello hay que tener en cuenta las reglas

De los signos para la multiplicación:

(+)·(+) = (+)
(-) ·(-) = (+)
(+)·(-) = (+)
(-) ·(+) = (-)

Ejemplo:

$$9(x-5)-1(x-5) = 4(x-1)$$

Se quitan los paréntesis: $9x-45-x+5 = 4x-4$

3- Trasposición de términos:

Se adopta el criterio de dejar en un miembro los términos que posean la incógnita y se pasan al otro miembro los demás. La transposición de términos se rige por:

- Regla de la suma: si se suma o se resta a los dos miembros de una ecuación el mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.
  Esta regla de la suma se entiende más fácilmente diciendo "lo que está en un miembro sumando, pasa al otro miembro restando y viceversa".
- Regla del producto: si se multiplica o divide los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Al igual que antes, la regla del producto se aplica directamente al decir "lo que está en un miembro multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo y viceversa"

Si continuamos con el ejemplo anterior:

$$9x - 45 - x + 5 = 4x - 4$$

Agrupo los términos con x en el primer miembro y los términos independientes (sin x) en el segundo:

$$9x-x-4x=45-5-4$$

4- Simplificamos:

Reduzco términos semejantes haciendo las operaciones con los términos:

$$8x-4x=40-4$$

$$4x=36$$

5- Despejamos la incógnita:

Como el 4 está multiplicando a x, pasa al otro miembro dividiendo:

$$x=\frac{36}{4}=9$$

Ejemplos de resolución de ecuaciones:

a) 3x - 4 = 24 - x

Agrupo las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$$3x+x=24+4$$

Reduzco los términos y despejo la incógnita:

$$4x=28$$

$$x=\frac{28}{4}=7$$

b) 3 * (x-7) = 5 * (x-1) - 4x

Primero eliminamos paréntesis:

$$3x-21=5x-5-4x$$

Agrupamos las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$$3x-5x+4x=21-5$$

Reduzco términos y despejo la incógnita:

$$2x=16$$

$$x=\frac{16}{2}=8$$

c) $\frac{7+x}{3}=-\frac{x-2}{6}$

Primero hallamos el m.c.m. de los denominadores (6,3) = 6

Ahora multiplicamos los numeradores por el valor del m.c.m., poniendo paréntesis si es necesario y teniendo cuidado con los signos:

$$\frac{6*(7+x)}{3}=-\frac{6*(x-2)}{6}$$

Quitamos los paréntesis y realizamos la división, eliminando así los denominadores:

$$\frac{42+6x}{3} = -\frac{6x-12}{6}$$

$$14+2x=-x+2$$

Ahora agrupamos y despejamos la incógnita:

$$2x+x=-14+2$$

$$3x=-12$$

$$x=-\frac{12}{3}=-4$$

1.2 El Lenguaje algebraico

La parte realmente práctica de todos los contenidos estudiados hasta ahora, consiste en traducir problemas de la vida cotidiana a un lenguaje matemático para poder resolverlos. En general llamamos incógnita a la cantidad que desconocemos y que es objeto de cálculo y la identificamos habitualmente con la letra "x" (aunque puede utilizarse cualquier letra).

Ejemplos:

El doble de un número: 2x

La mitad de un número: $\frac{a}{2}$

El doble de un número más ese mismo número: 2x + x

El triple de un número menos la cuarta parte de otro número: $3x - \frac{y}{4}$

1.3 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Para resolver problemas mediante ecuaciones es conveniente seguir los siguientes pasos:

1. **Leemos el enunciado con atención.**
2. **Expresamos la información en lenguaje algebraico.**
3. **Planteamos la ecuación.**
4. **Resolvemos la ecuación.**
5. **Comprobamos el resultado.**

Ejemplo resuelto: Pedro tiene 14 años, y su hermana Ana 2. ¿Cuántos años deben de transcurrir para que la edad de Pedro sea el triple que la de su hermana Ana?

1. Leemos el problema con atención e interpretamos la información.
2. Expresamos la información en lenguaje algebraico:
   Años que tienen que pasar: x
   Edad de Pedro dentro de x años: 14 + x
   Edad de Ana dentro de x años: 2 + x

3. Planteamos la ecuación:
   14 + x = 3 (2 + x)
4. Resolvemos la ecuación:
   14 + x = 6 + 3x ⇒ 14 - 6 = 3x – x ⇒ 8 = 2x ⇒ x = 4
5. Comprobamos que el resultado sea correcto:
   14 + 4 = 3(2 + 4) ⇒ 18 = 3(6) ⇒ 18 = 18

Ejemplo resuelto: Perdí un tercio de las ovejas y llegué con 24. ¿Cuántas ovejas tenía?

x = número de ovejas que tenía (definición de la incógnita).

Un tercio de las que tenía es x/3 (transformación al lenguaje algebraico).

x – x/3 = 24 (planteamiento de la ecuación).

$$x - \frac{x}{3} = 24 \;\rightarrow\; 3x - x = 72 \;\rightarrow\; 2x = 72 \;\rightarrow\; x = \frac{72}{2} \;\rightarrow\; x = 36$$

El resultado de la ecuación, x = 36, es coherente con el enunciado, 36 menos 12 (su tercera parte) son 24.

2. IDENTIDADES NOTABLES

Denominamos **Identidades o igualdades notables** a diversas expresiones algebraicas que aparecen con frecuencia en el álgebra. El conocimiento de estas expresiones nos permitirá resolver diversos problemas de una forma mucho más rápida y eficaz.

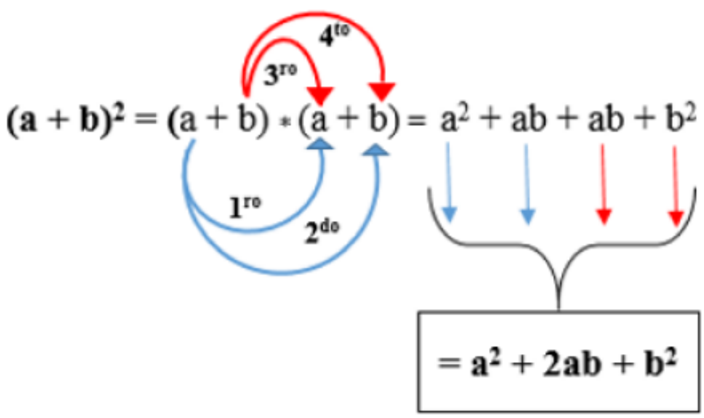
De entre todas las igualdades notables destacamos tres: Cuadrado de la suma, cuadrado de la diferencia y suma por diferencia.

2.1 Cuadrado de la suma

El cuadrado de la suma de dos monomios a y b, es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo monomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demostración:



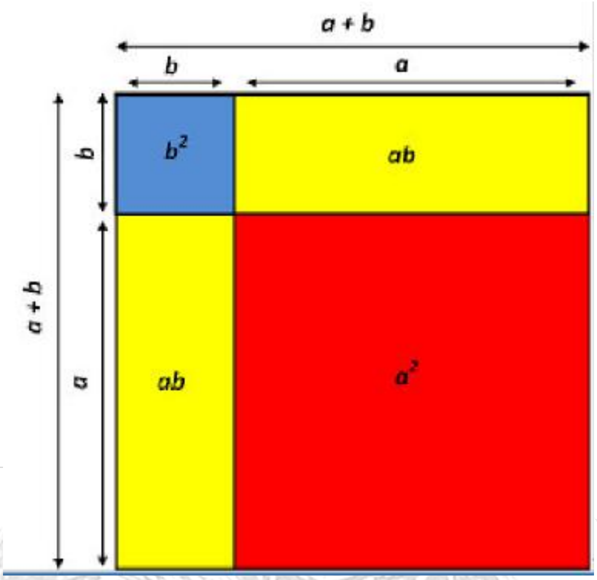


Imagen 2. Cuadrado de la suma. Autor: Almudena Casares.
Fuente: Matemáticas Almudena http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/
Licencia: Desconocida

Ejemplo:

$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$

$(-2x^2+3)^2 = (-2x^2)^2 + 2 \cdot (-2x^2) \cdot 3 + 3^2 = 4x^4 - 12x^2 + 9.$

2.2 Cuadrado de la diferencia

El cuadrado de la diferencia de dos monomios a y b, es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

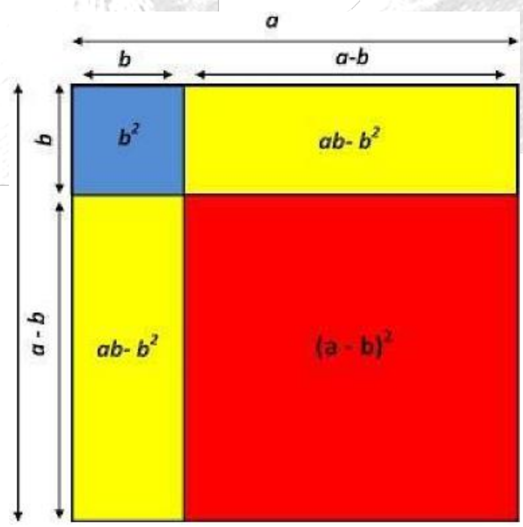


Imagen 3: Almudena Casares
Fuente: Matemáticas Almudena http://xn--matemticas-almudena-uub.blogspot.com.es/
Licencia: Desconocida

Ejemplo:

$(x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$

$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9.$

Suma por diferencia

La **suma de un monomio por su diferencia** es igual al cuadrado del primer monomio menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

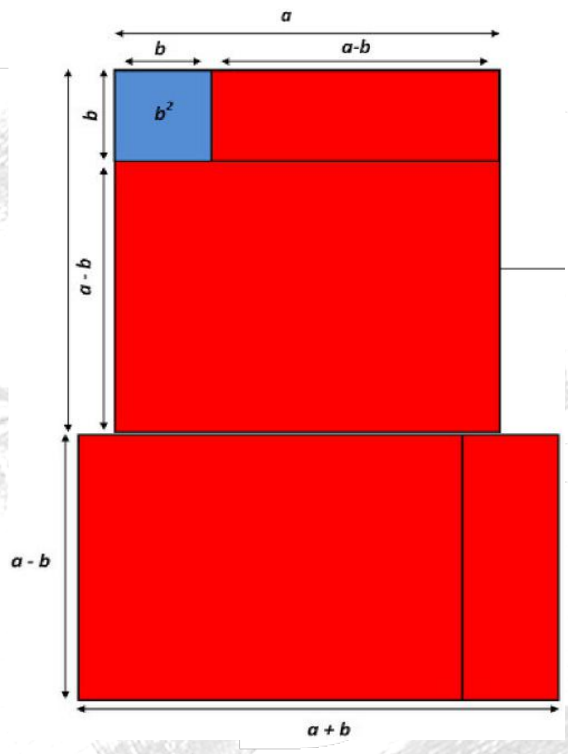


Imagen 4. Autor: Almudena Casares
Fuente: Matemáticas Almudena http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/
Licencia: desconocida

Ejemplo:

$(x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 4.$

$(2x+5)\cdot(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25.$

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Una tabla es una representación de datos, mediante parejas de valores ordenados, que expresan la relación existente entre dos magnitudes o dos situaciones cualesquiera.

Por ejemplo, la siguiente tabla nos muestra el nivel de agua en un recipiente bajo un grifo que gotea con el paso del tiempo:

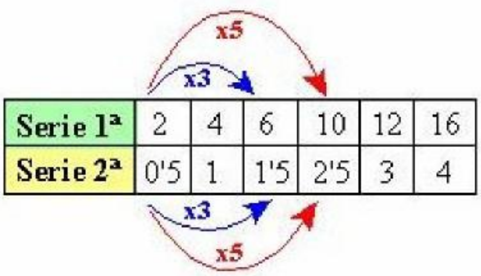
Tiempo (minutos)	0	15	30	45	60
Nivel de agua (cm)	0	10	14	17	19

La siguiente tabla nos indica el dinero a pagar por los alumnos que desean ira a una excursión dependiendo del número de alumnos que se apunten al viaje:

Nº alumnos	5	10	20	40	50
Euros	80	40	20	10	8

Si nos fijamos bien, las tablas pueden ser aleatorias o mantener una relación de proporcionalidad, pero ¿cómo reconocer una proporcionalidad directa con tablas?

La siguiente tabla es de proporcionalidad directa



Serie 1ª	2	4	6	10	12	16
Serie 2ª	0'5	1	1'5	2'5	3	4

Imagen 5.Proporcionalidad directa. Fuente: Portal de educación de CLM

Observa que, al multiplicar un valor de la 1ª serie por un número, el valor de la 2ª serie queda multiplicado por dicho número (o al revés).

3.1 Ejes de coordenadas cartesianas

Podemos representar las tablas de valores como pares de números, utilizando para ello los ejes de coordenadas cartesianas.

Los ejes coordenadas cartesianas están formadas por dos rectas reales que se cortan en un punto. El eje horizontal se llama eje de abscisas o también eje x, y el vertical se llama eje de ordenadas o eje y. El punto donde se cortan los ejes es el origen de coordenadas.

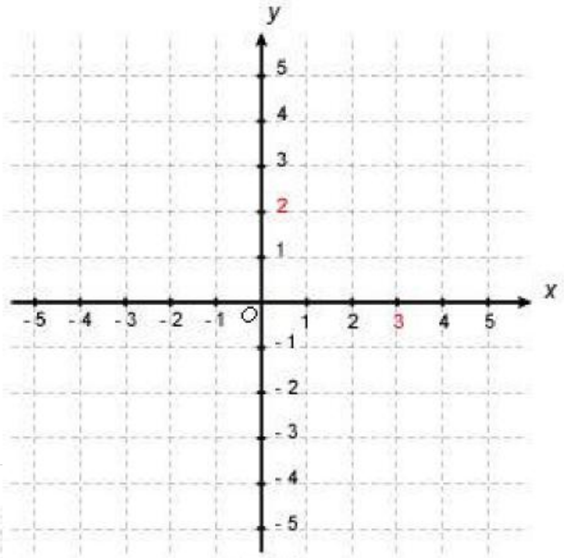


Figura 1

Imagen 6.Autor: Desconocido
Fuente: Tareasfacil httpí/tareasfacil.info/
Licencia: desconocida

En el **eje de abscisas** o eje x:

- Los puntos situados a la derecha del 0 son POSITIVOS.
- Los puntos situados a la izquierda del 0 son NEGATIVOS.

En el **eje de ordenadas** o eje y:

- - Los puntos situados por encima del 0 son POSITIVOS.
- - Los puntos situados por debajo del 0 son NEGATIVOS.

3.2 Representación en un sistema de ejes de coordenadas

Con este sistema de referencia, cada punto del plano puede "nombrarse" mediante dos números, que suelen escribirse entre paréntesis y separados por una coma y se llama **coordenada del punto A (x, y)**. El primero de esos números corresponde a la distancia del punto hasta el eje de ordenadas, medida a lo largo del eje de abscisas o eje x; el segundo corresponde a la distancia desde el punto al eje de abscisas medido a lo largo del eje de ordenadas o eje y.

El plano queda dividido por los ejes de coordenadas en cuatro cuadrantes, de forma que cualquier punto ubicado en dichos cuadrantes cumplen una propiedad de signos de la siguiente forma:

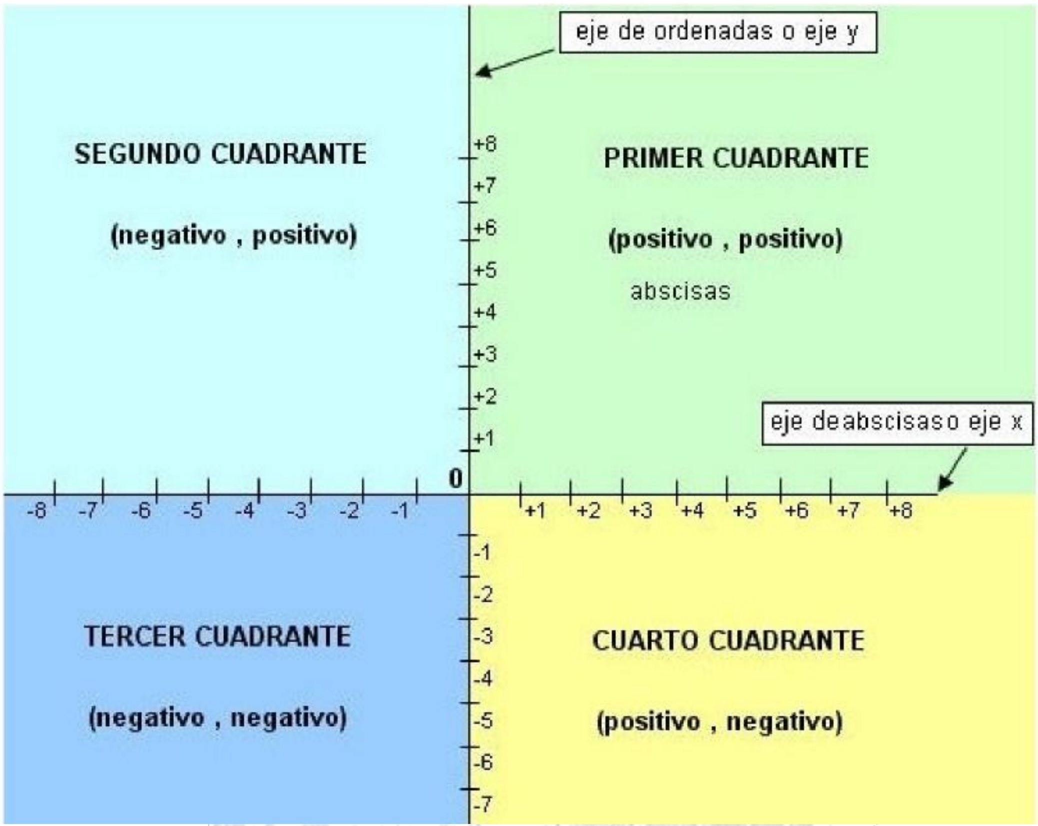


Imagen 7.Fuente: Portal de educación de CLM

Para representar cualquier punto en unos ejes de coordenadas, mediremos las distancias del punto sobre los ejes x e y.

Ejemplo:

Vamos a representar en el eje de coordenadas los siguientes puntos:

A (+4, +3); B (0, +5); C (-2, +4); D (-3, -6); E (+3, -4); F (-7, 0)

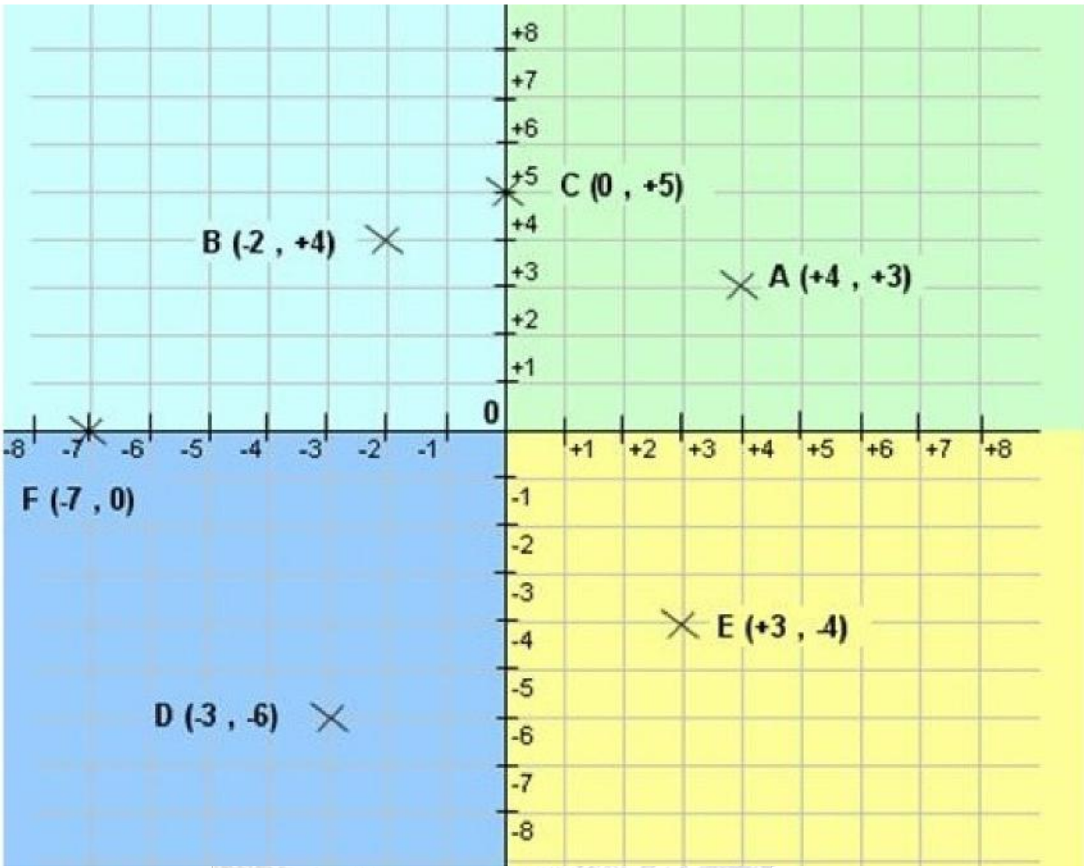


Imagen 8.Fuente: Portal de educación de CLM

3.3 Representación gráfica de una tabla de valores

Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla. Para representar los datos de una tabla en una gráfica, seguimos los siguientes pasos:

1. **Representamos los puntos de la tabla sobre unos ejes.**
2. **Unimos los puntos de izquierda a derecha.**

Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones.

Para interpretar una gráfica, hemos de observarla de izquierda a derecha:

kg patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

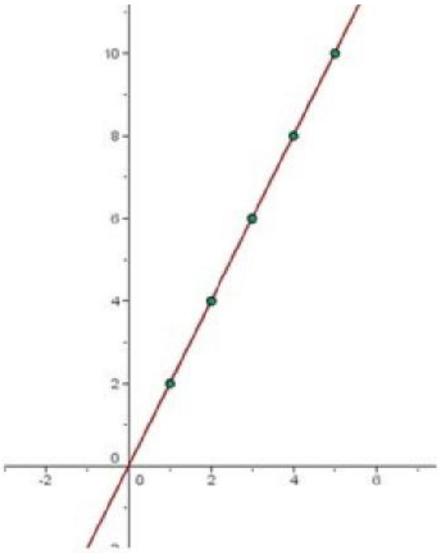


Imagen 9.Fuente: Portal de educación de CLM

En esa gráfica podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando.

Las gráficas pueden ser:

Creciente: Si al aumentar los valores del eje de abscisas (eje x), aumentan también los valores del eje de ordenadas (eje y).

Decreciente: Si al aumentar los valores del eje de abscisas, disminuyen los valores del eje de ordenadas.

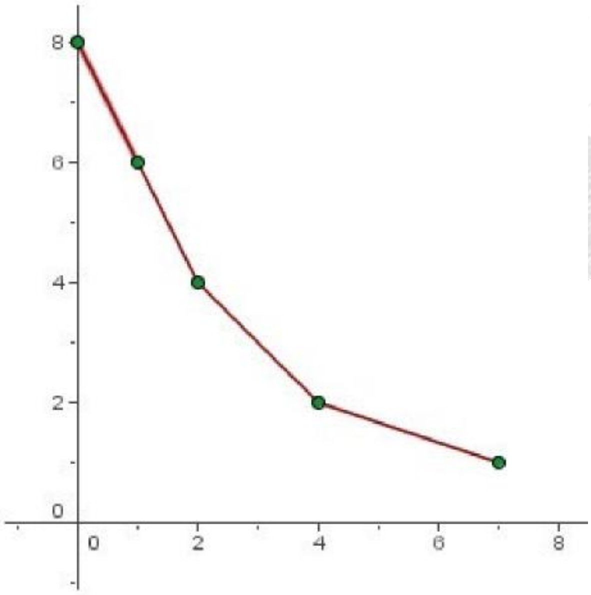


Imagen 10.Fuente: Portal de educación de CLM

Constante: Si al aumentar el valor del eje de abscisas, el valor del eje de ordenadas se mantiene igual.

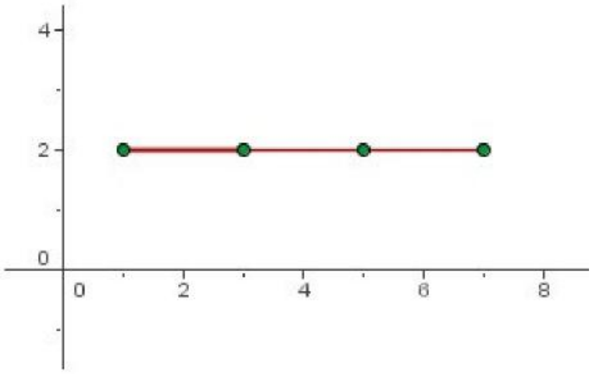


Imagen 11.Fuente: Portal de educación de CLM

Para saber más

Cuando tenemos una gráfica, podemos obtener fácilmente relaciones entre los datos representados. Para ello trazamos líneas paralelas a los ejes de abscisas y de ordenadas desde cualquier punto del gráfico hasta que corten a dichos ejes. Así obtenemos los valores x e y del punto considerado.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica representa la relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

Imagen 12. Fuente: Portal de educación de CLM

Imagen 13.Fuente: Portal de educación de CLM

4. EJERCICIOS

Actividad 1

Ten en cuenta que una expresión algebraica es como una máquina de fabricar valores. Para cada número que se introduce, "fabrica" un valor numérico diferente. Por lo tanto el valor numérico depende del valor que asignemos a las letras en cada momento.

¿Cuál será el valor numérico de la expresión algebraica siguiente cuando le asignamos a la x los valores 10 y -2?

$$2x^2 + 6x + 21$$

Actividad 2

Calcula el valor numérico de la siguiente expresión algebraica para los valores de las letras que se indican:

$$x^2 - 4x + 2 \text{ para } \quad x = -1$$

Recuerda la importancia de poner paréntesis al sustituir para no cometer errores

Actividad 3

Calcula el valor numérico de la siguiente expresión algebraica para los valores de las letras que se indican:

$$-3x^2 + xy - 2y \text{ para } \ x = -1, \quad y = 3$$

Recuerda la importancia de poner paréntesis al sustituir para no cometer errores

Actividad 4

Determina el valor numérico de las siguientes expresiones algebraica:

a) Valor numérico de 2xy2z – xy + 2, para x = 2, y = - 2, z = - 1.
b) Valor numérico de 5x/y – 2x +3, para x = 1, y = - 5, z = 4.
c) Valor numérico de $a^2 + b^2$, para a = 3, b = - 4.
d) Valor numérico de $(a + b)^2$, para a = 3, b = - 4.

Actividad 5

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes expresiones. El cuadrado de un número.

a. El cuadrado de un número.
b. El cubo de un número más el doble del mismo número.
c. Un número par.
d. Un número impar.
e. Dos números enteros consecutivos.

Actividad 6

Desarrolla las siguientes identidades notables y compruébalas:

a) $(x + 1)^2$
b) $(2x - 5)^2$
c) $(x + 5)^2$
d) $(-2 + y)^2$
e) $(1 - p) \cdot (1 + p)$
f) $(3x - 2)^2$
g) $(3x - 2)\cdot(3x + 2)$
h) $(x + 5)\cdot(x - 5)$
i) $(3x^2 - 2) \cdot (3x^2 + 2)$

Actividad 7

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $-5 \cdot (3 - x) = -5$
b) $3 - (2 + x) = x + 3$
c) $-4 \cdot (3 - x) - (-3 - 5x) = -1 + x$
d) $\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = 2$
e) $\frac{3x}{2} + x - 2 = \frac{1}{4} + 2x$

Actividad 8

Resuelve los siguientes problemas de ecuaciones:

a) El patio de mi casa mide 20 metros más de largo que de ancho, teniendo forma rectangular y siendo su perímetro de 200 metros. ¿Cuál es su longitud y su anchura?
b) La finca de Pedro es rectangular y tiene 30 metros más de un lado que de otro. Si el perímetro total es de 540 metros, ¿cuánto mide cada lado?
c) La diferencia de dos números es 20. Si sabemos que el número mayor es cinco veces el menor. ¿Cuál es el valor de los dos números?
d) La edad de Javier es el triple que la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Qué edad tiene el hijo de Javier?
e) En una bolsa hay bolas azules, blancas y negras. El número de bolas rojas es igual al de bolas blancas más 5, y hay 3 bolas negras menos que blancas. Si en total hay 32 bolas, ¿cuántas hay de cada color?
f) Se tiene el mismo número de cajas de manzanas que de limones. Si en una caja de manzanas caben 13 unidades y en una de limones caben 17, ¿cuántas cajas se tiene si hay un total de 180 frutas?

Actividad 9

Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A (-3,0); B (2,3); C (2,-4); D (-4,-1)

Actividad 10

La siguiente tabla muestra la demanda de un producto (en miles de Euros) a lo largo del tiempo desde su puesta en venta (en meses). Obsérvala y contesta:

a) Representa los datos de la tabla en un gráfico.
b) ¿En qué momento la demanda es mínima?
c) ¿Hay algún momento en el que el consumo no varíe?
d) ¿Qué cantidad de producto se demanda a los 120 meses?

Meses	Producto (miles de €)
0	6
20	5
40	4.2
60	4
80	4.2
100	5
120	7
140	9