Bloque 8. Tema 4.

Geometría del espacio

ÍNDICE

1) Conceptos previos

¿Dónde podemos encontrar geometría? ¡En todas partes! Basta mirar para ver geometría, basta únicamente pensar, en todo hay geometría, hasta en nuestros sueños. Seguramente ahora mismo estés leyendo estas líneas dentro de una habitación, es decir, dentro de un ortoedro, si has impreso el tema estarás usando un rectángulo de papel, si no, una pantalla rectangular. Tu ojo es un prodigio geométrico esférico que te permite leer, tu cuerpo, el edificio en el que vives, tu calle, la farola más cercana,... Todo está hecho utilizando geometría. No es extraño el interés que esta rama de la matemática despertó ya en la antigua Grecia, en el Egipto de los faraones o incluso antes.

En este tema se presentaran formas geométricas elementales, estudios sencillos y métodos para trabajar usado la geometría.

1.1) ¿Qué es la geometría?

Geometría (del griego geo, 'tierra'; metrein, 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

2) Repaso a las figuras planas elementales

Antes de meternos en el estudio de los cuerpos geométricos elementales recordemos algunas de las figuras planas que vamos a necesitar, así como sus elementos, perímetro y área.

Debemos recordar que:

- El **perímetro** es la suma de la longitud de los bordes de una figura geométrica plana.

  Perímetro = Suma de todos los lados de una figura.

  El perímetro de un círculo se llama longitud de una circunferencia.

- El **área** (o **superficie**) es el trozo de plano que queda encerrado por el borde de una figura geométrica.

2.1) Perímetros y áreas de figuras planas

Perímetro y área de un triángulo.

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices del triángulo.

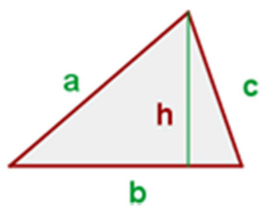


Imagen 1. Triángulo.
URL: http://www.vitutor.com/
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

El perímetro de un triángulo es igual a la suma de sus lados: **P = a + b + c**

Para calcular el área de un triángulo usaremos la siguiente fórmula: **A = (b · h) / 2**

Perímetro y área de un cuadrado.

Un cuadrado es la figura plana cerrada formada por cuatro líneas rectas iguales que forman otros tantos ángulos rectos.

Imagen 2. Cuadrado.
URL: http://www.vitutor.com/
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Si un cuadrado C tiene lados que miden l, entonces, el perímetro es igual a *4l*, pues los cuatro lados son iguales.

P = 4·l

El área de un cuadrado es el producto de la longitud del lado por sí misma.

A = l^2

Perímetro y área de un rectángulo.

Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

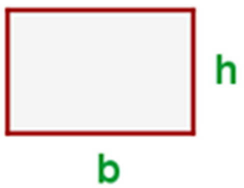


Imagen 3. Rectángulo.
URL: http://www.vitutor.com/
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

El perímetro de un rectángulo es igual a la suma de todos sus lados:

P = 2 · b + 2 · h

El área de un rectángulo es igual al producto de dos de sus lados contiguos:

A = b · h

Perímetro y área de un polígono regular.

En geometría, se denomina **polígono regular** a un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Los polígonos regulares de tres y cuatro lados se llaman triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente. Para polígonos de más lados, se añade el término *regular* (pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, etc).

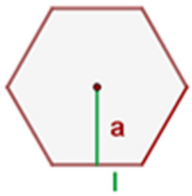


Imagen 4. Polígono regular.
URL: http://www.vitutor.com/
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Al tener todos los lados iguales, el perímetro se calcula multiplicando el número de lados por la longitud del lado.

El área de un polígono regular, conociendo el perímetro y la apotema es:

A = (perímetro · apotema) / 2

Siendo la apotema, **a**: segmento perpendicular a un lado, hasta el centro del polígono.

Perímetro (longitud) de una circunferencia.

La **circunferencia** es una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia del centro. El perímetro o longitud de la circunferencia se calcula mediante la siguiente fórmula:

Imagen 5. Circunferencia.
Fuente: www.vitutor.com.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

L = 2 π r

Siendo r, radio: segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

Área de un círculo.

Un **círculo** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que una cantidad constante, llamada radio. En otras palabras, es la región del plano delimitada por una circunferencia y que posee un área definida.

Imagen 6. Círculo. Licencia: Desconocida.
URL: http://www.vitutor.com/.

$A = \pi r^2$

Ejercicio 1

¿Cuál es el perímetro de un triángulo cuyos lados son iguales y miden 10 cm?

El perímetro mide ___________

Ejercicio 2

¿Cuál es el perímetro de un pentágono regular de lado 6 cm?

	a) 24 cm
	b) 36 cm
	c) 30 cm

Ejercicio 3

Lea el párrafo que aparece abajo y complete las palabras que faltan.

Calcula la longitud de una circunferencia de radio 5 cm. Solución: ___________

Ejercicio 4

Complete las palabras que faltan.

Calcula el área de las siguientes figuras:

- Un cuadrado de 3 dm de lado. Solución: ____ dm^2.
- Un rectángulo de 8 cm de altura y la mitad de base. Solución: ____ cm^2.
- Un triángulo rectángulo de 13 cm de base y 4 cm de altura. Solución: ____ cm^2.
- Hexágono regular de 6 m de lado. Solución: ____ m^2
- Círculo de radio 5 cm. Solución: ____ cm^2

3) Poliedros y cuerpos de revolución

3.1) Poliedros

Un **poliedro** es un sólido de caras planas (la palabra viene del griego, poli- significa "muchas" y -edro significa "cara").

Cada cara plana (simplemente "cara") es un polígono (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágono,….).

Los poliedros tienen elementos comunes, algunos de los cuales son:

- Cara: cada uno de los polígonos que forman o limitan un poliedro.
- Arista: segmento formado por la intersección de dos caras de un poliedro.
- Vértice: punto de intersección de dos o más aristas de un poliedro.

En la siguiente imagen podemos ver estos elementos sobre un poliedro regular formado por doce caras pentagonales, un dodecaedro.

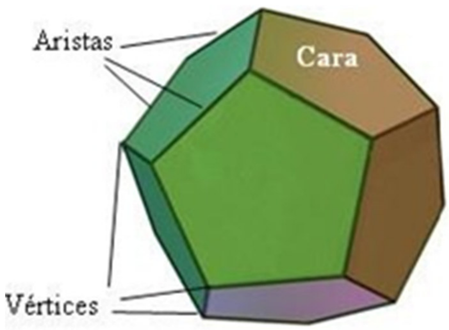


Imagen 7. Fuente: Desconocida.
Autor: Desconocido.
Licencia: Desconocida.

A parte de los elementos que aparecen en el dibujo están los vértices que son los puntos donde se cortan las aristas.

Los elementos de un poliedro convexo cumplen una propiedad curiosa que relaciona el número de caras, el de vértices y el de aristas. Es conocido como la fórmula de Euler y dice que:

"El número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos, es decir: $C + V = A + 2$***".***

Un punto de vista especial, con respecto a un poliedro se obtiene al realizar el denominado desarrollo plano del mismo, que consiste en dibujar sobre un papel una figura que permita construir el poliedro mediante operaciones de plagado. Por ejemplo, aquí mostramos un desarrollo plano para un cubo, cuerpo geométrico formado por seis caras cuadradas:

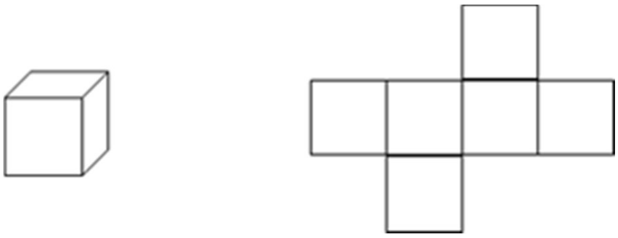


Imagen 8: Desarrollo plano de un cubo. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.
URL: http://www.wikipedia.com/

3.1.1) Poliedros regulares

Dentro de todos los poliedros que existen hay unos pocos, concretamente **cinco**, que se les conoce como poliedros regulares o sólidos platónicos.

Estos poliedros tienen una propiedad especial y es que todas sus caras están formadas por polígonos regulares iguales. Debido a esta propiedad sólo cinco son los cuerpos geométricos que la cumplen: el tetraedro, el cubo o exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. En la imagen siguiente podemos observar estas figuras junto a su desarrollo plano:

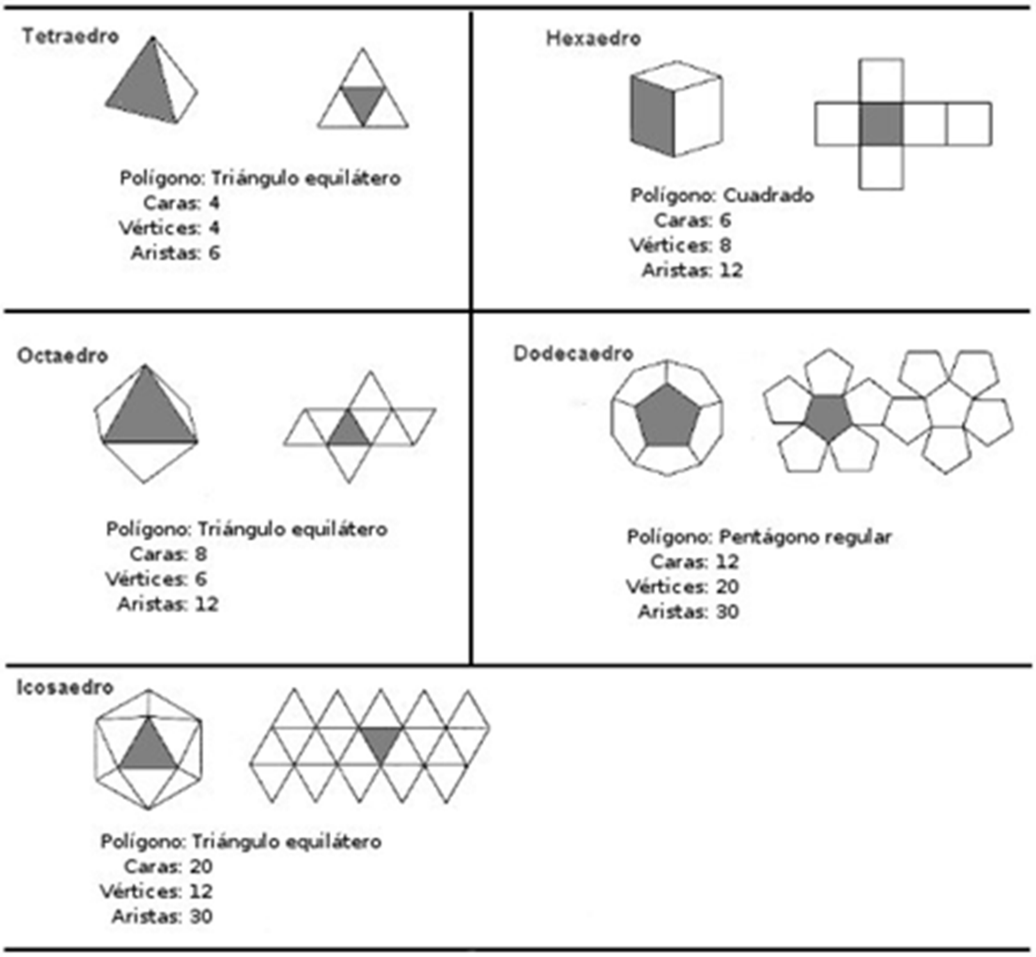


Imagen 9: Poliedros regulares. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida

3.1.2) Prisma

Otro tipo de poliedros son los prismas, estos tienen las características especiales de que sus bases son polígonos regulares iguales y las caras laterales son rectángulos. El nombre de los prismas depende del polígono regular de la base:

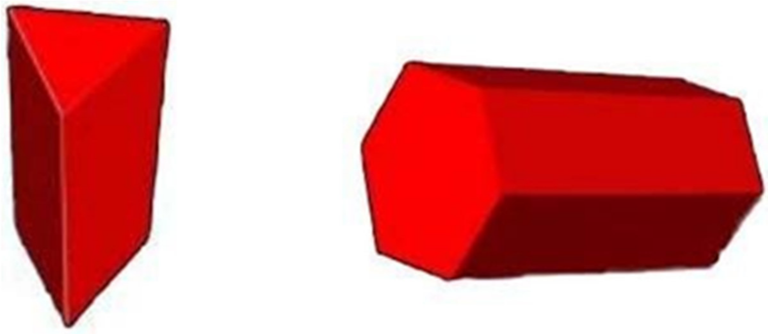


Imagen 10: Prisma triangular y hexagonal. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Algunos de los elementos de un prisma son los que aparecen en el siguiente dibujo:

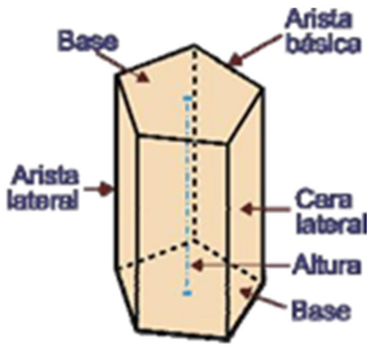


Imagen 11: Elementos de un prisma. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Hay diferentes tipos de prismas, en función de sus características podemos hablar de:

- Prismas regulares: aquellos cuyas bases son polígonos regulares. En función del polígono de las bases, los prismas pueden ser de base triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.
- Prismas irregulares: aquellos cuyas bases son polígonos irregulares.
- Prismas rectos: aquellos cuyas caras laterales son cuadrados o rectángulos.
- Prismas oblicuos: aquellos cuyas caras laterales son romboides o rombos.
- Paralelepípedos: prismas cuyas bases son paralelogramos.
- Ortoedros: prisma que tiene todas sus caras rectangulares.

En la imagen siguiente vemos algunos ejemplos de prismas:

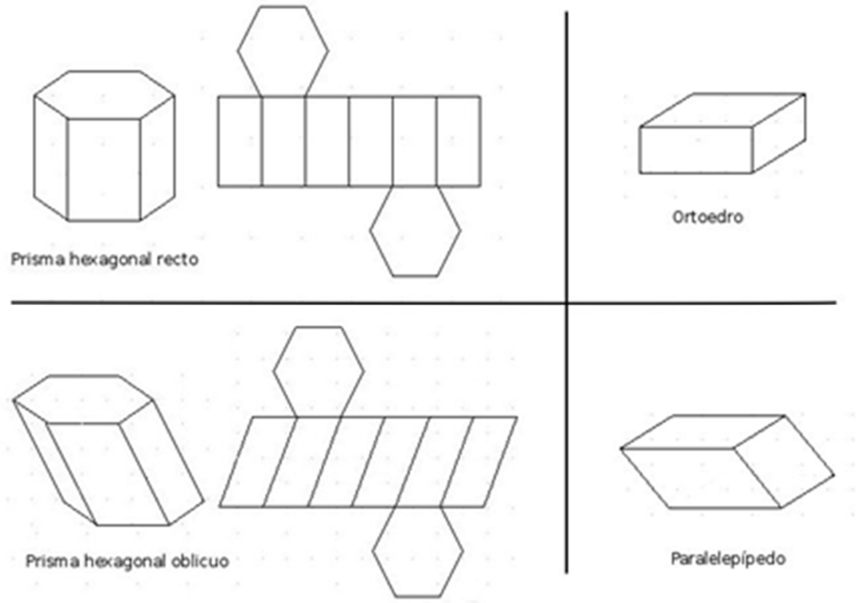


Imagen 12: Ejemplos de prismas. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

3.1.3) Pirámides

Siguiendo el análisis de los distintos poliedros llegamos al último que vamos a estudiar a fondo, estos son las pirámides.

Las pirámides están formadas por una cara (la base) que es un polígono regular y caras laterales que son triángulos que se unen en un vértice.

A la hora de llamar a las pirámides el nombre varía dependiendo del polígono regular que tienen por base.

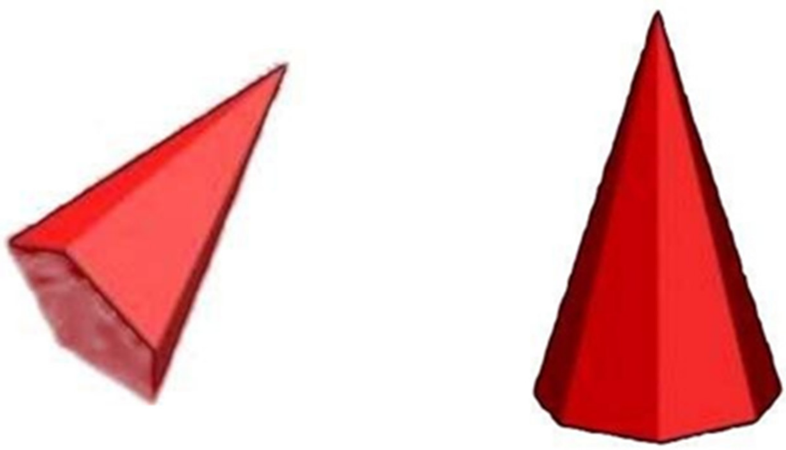


Imagen 13: Pirámides. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

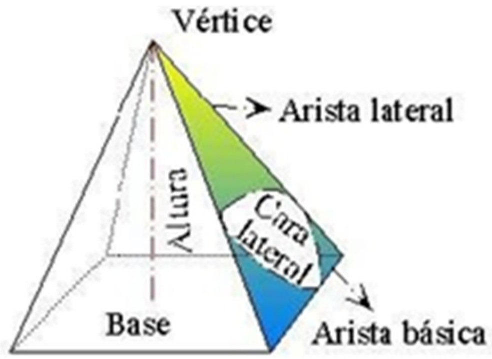


Imagen 14: Elementos de una pirámide. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

3.2) Cuerpos redondos

Los cuerpos geométricos que hemos estudiado por ahora tiene todas sus caras planas, pero también hay los que las tienen curvas. Estos son los cuerpos redondos. Nos vamos a centrar sólo en el estudio de tres de ellos, son cuerpos que se denominan de revolución, ya que se obtienen cuando hacemos girar una figura geométrica plana.

- Si partimos de un rectángulo y lo hacemos girar sobre uno de sus lados obtenemos un cilindro.
- Si partimos de un triángulo rectángulo y lo hacemos girar sobre uno de sus catetos obtenemos un cono.
- Si partimos de una media circunferencia y la hacemos girar sobre el diámetro obtenemos una esfera.

La imagen ilustra la construcción de los cuerpos de la revolución citados.

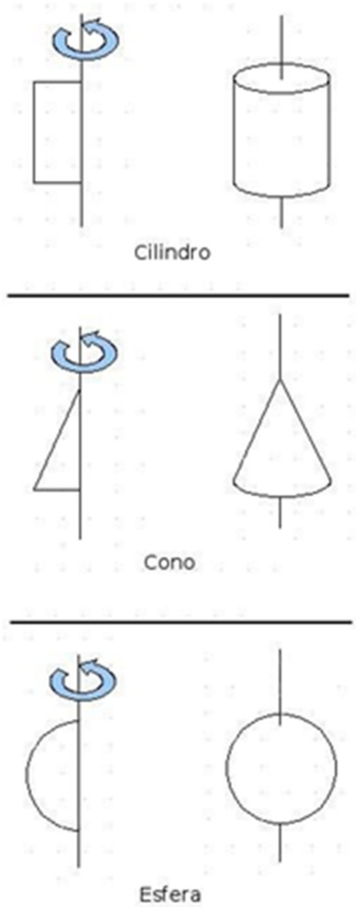


Imagen 15: Construcción de los cuerpos de revolución. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

3.2.1) El cilindro

Como hemos dicho antes se obtiene al hacer girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Los elementos de un cilindro son:

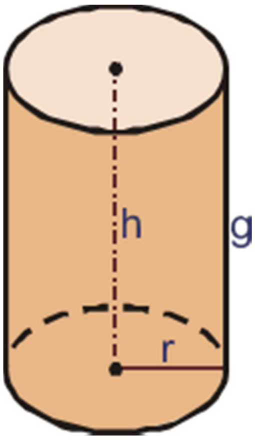


Imagen 16: Cilindro. Elementos. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Donde h simboliza la altura del cilindro, g la generatriz y r el radio de la base.

3.2.2) El cono

Al igual que el cilindro es un cuerpo de revolución, obtenido, como ya hemos dicho, al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

Los elementos de un cono son:

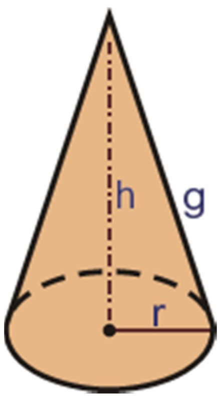


Imagen 17. Cono. Elementos. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Donde h simboliza la altura del cilindro, g la generatriz y r el radio de la base

3.2.3) Esfera

Por último, la esfera, cuerpo de revolución que se obtiene al girar una semicircunferencia. Se usa como modelo ya sea para arquitectura, moda, deportes, balones,…; además es una de las formas que más se repite en la naturaleza: los planetas, distintas frutas, semillas,… Sus elementos son:

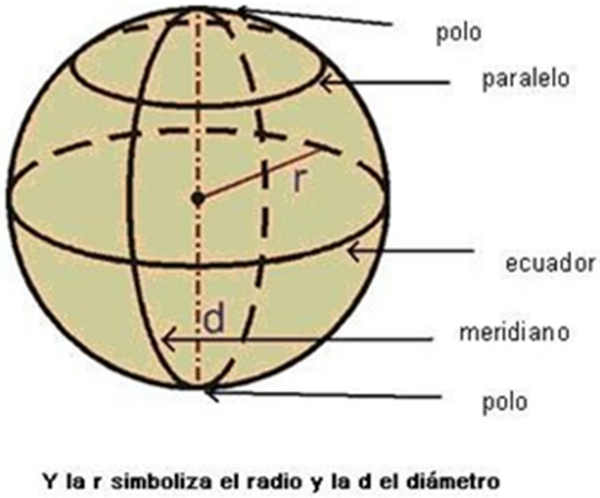


Imagen 18. Esfera. Elementos. Fuente: Desconocida.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

3.3) El área y el volumen

Hay veces que necesitamos saber la superficie de alguno de los cuerpos que hemos estudiado así como la capacidad interior que tiene.

Supongamos que queremos poner un depósito de agua de forma cilíndrica con la mayor capacidad posible, para ello necesitamos calcular el área de un cilindro y el volumen del mismo.

Para calcular el área de los cuerpos geométricos lo primero que tenemos que visualizar es el desarrollo de cada uno. Veamos un ejemplo:

Si tememos un prisma hexagonal obtenemos seis rectángulos y dos hexágonos:

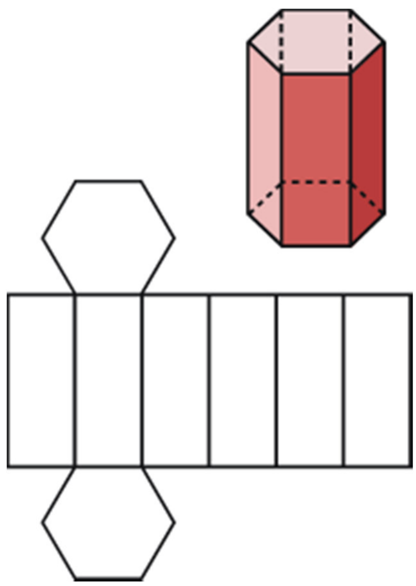


Imagen 19: Prisma hexagonal. Fuente: Desconocida.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

En la tabla de la página siguiente se encuentran el desarrollo y las fórmulas del área y el volumen de los distintos cuerpos:

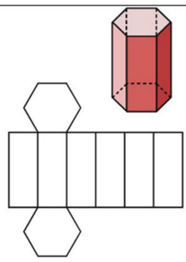
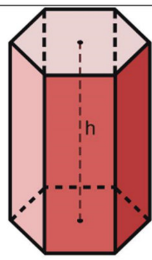
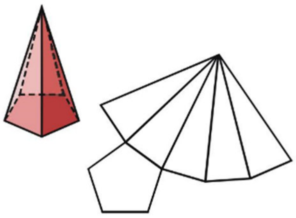
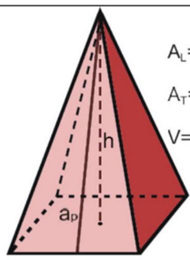
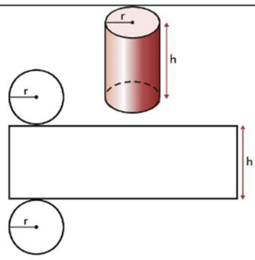
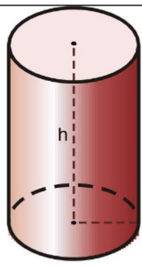
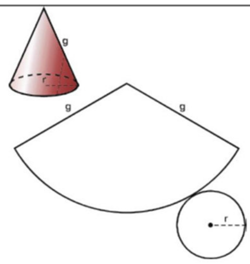
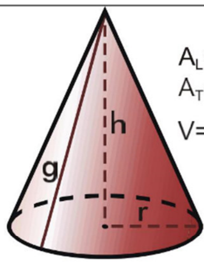
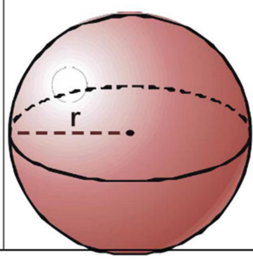
Cuerpo geométrico	***Desarrollo***	***Área y volumen***
Prisma recto		 $A_L=p\cdot h$ $A_T=p\cdot h+2A_B$ $V=A_B\cdot h$
Pirámide recta		 $A_L=\frac{p\cdot a_p}{2}$ $A_T=\frac{p\cdot a_p+A_B}{2}$ $V=\frac{A_B\cdot h}{3}$
Cilindro recto		 $A_L=2\pi r\cdot h$ $A_T=2\pi r\cdot h+2\pi r^2$ $V=\pi r^2\cdot h$
Cono recto		 $A_L=\pi r\cdot g$ $A_T=\pi r\cdot g+\pi r^2$ $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$
Esfera		$A=4\pi r^2$ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 

Imagen 20: Áreas y volúmenes en poliedros y cuerpos de revolución. Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Por último, debemos recordar que muchas formaciones geométricas son composiciones de los cuerpos geométricos que se han estudiado en este tema.

Ejercicio 5

Completa las palabras que faltan.

Calcula el área que ocupan:

- Un prisma hexagonal regular recto de arista básica 8 cm y altura 10 cm. Solución: _________ cm^2
- Un planeta esférico de 10 km de radio. Solución: _________ Km^2

Ejercicio 6

Completa las palabras que faltan.

¿Qué volumen ocupan las siguientes figuras?

- Un cilindro recto de altura 4 cm y radio de la base 3 cm. Solución: _________ cm^3
- Un cono recto de 4 cm de altura y radio de la base 3 cm. Solución: _________ cm^3
- Un cubo de 9 m de arista. Solución: _________ m^3.
- Un prisma hexagonal recto de arista básica 8 cm y altura 10 cm. Solución: _________ cm^3.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

¿Cuál es el perímetro de un triángulo cuyos lados son iguales y miden 10 cm?

El perímetro mide **30 cm**

Ejercicio 2

¿Cuál es el perímetro de un pentágono regular de lado 6 cm?

	d) 24 cm
	e) 36 cm
X	f) 30 cm

Ejercicio 3

Lea el párrafo que aparece abajo y complete las palabras que faltan.

Calcula la longitud de una circunferencia de radio 5 cm. Solución: **31,4 cm**

Ejercicio 4

Complete las palabras que faltan.

Calcula el área de las siguientes figuras:

- Un cuadrado de 3 dm de lado. Solución: **9** dm^2.
- Un rectángulo de 8 cm de altura y la mitad de base. Solución: **32** cm^2.
- Un triángulo rectángulo de 13 cm de base y 4 cm de altura. Solución: **26** cm^2.
- Hexágono regular de 6 m de lado. Solución: **93,53** m^2
- Círculo de radio 5 cm. Solución: **78,5** cm^2

Ejercicio 5

Completa las palabras que faltan.

Calcula el área que ocupan:

- Un prisma hexagonal regular recto de arista básica 8 cm y altura 10 cm. Solución: **812,55** cm^2
- Un planeta esférico de 10 km de radio. Solución: **1256,64** Km^2

Ejercicio 6

Completa las palabras que faltan.

¿Qué volumen ocupan las siguientes figuras?

- Un cilindro recto de altura 4 cm y radio de la base 3 cm. Solución: **282,74** cm^3
- Un cono recto de 4 cm de altura y radio de la base 3 cm. Solución: **37,70** cm^3
- Un cubo de 9 m de arista. Solución: **486** m^3.
- Un prisma hexagonal recto de arista básica 8 cm y altura 10 cm. Solución: **1662,77** cm^3.