Bloque 8. Tema 3.

Álgebra

ÍNDICE

1) Conceptos previos

Muchas veces en distintos momentos de nuestra vida se nos presentan problemas de distinta índole que, de una manera u otra, tenemos que resolver. Si nos ponemos a recapacitar como salimos del problema que tenemos, más o menos lo que hacemos es lo siguiente:

I. Nos enfrentamos al problema, lo recapacitamos,…

II. Vemos que es lo que realmente tenemos entre manos.

III. Buscamos como salir de él.

IV. Llevamos a cabo todo lo que hemos pensado para quitar del medio el problema.

V. Y, por último, evaluamos si lo que hemos hecho nos saca de él.

Si esto lo pasamos a un lenguaje un poco más científico, **a la hora de resolver un problema lo que hacemos es seguir los siguientes pasos:**

A) Se lee el problema una primera vez sin tomar nota de nada para enterarnos, lo mejor posible, sobre qué va el problema y cuantas incógnitas hay.

B) Se comienza el PLANTEAMIENTO, realizando una segunda lectura del problema, mediante esta lectura sacamos los datos del problema y la pregunta que nos hace. De esta forma ya tenemos estructurado el problema y detectadas las incógnitas. Para continuar avanzando en la resolución del problema es conveniente planificar el método es decir, utilizar una **ESTRATEGIA**, hay varias que pueden ayudarte a resolver problemas, por ejemplo:

- Ensayo y error: es decir, probar y comprobar si la prueba es una solución o nos acerca a ella.
- Dibujo o esquema: es importante no quedarse parado, sin hacer nada, después de haber leído y comprendido un enunciado. Tras la anotación de los datos, dibujar la situación o intentar representarla en un esquema es, en muchas ocasiones, un camino muy fructífero.
- Hacia atrás: lo que significa intentar reconstruir el problema desde la parte final hasta el comienzo.
- Resolución de un problema similar pero con datos más sencillos: esta estrategia suele dar muy buenos resultados, ya que al reconstruir el problema, haciendo simplificaciones, solemos entender cuáles son las piezas claves del razonamiento que nos conduce a la resolución.

En cualquier caso, es muy importante la organización de las ideas y el reflejo escrito de esta organización. Utilizar un método sistemático a la hora de enfrentarnos a un problema es, a medio plazo, muy beneficioso.

Seguidamente se extrae la ecuación a resolver a través del enunciado del problema.

C) Una vez terminado el planteamiento, se RESUELVE la ecuación (se soluciona).

D) Resuelta la ecuación se contesta a la pregunta que nos haga el problema.

E) Para terminar, debemos comprobar que la respuesta que hemos dado es coherente respecto a la pregunta; y comprobar que la respuesta es cierta, es decir, que el problema está bien hecho.

Como podéis observar los pasos a la hora de resolver los problemas tanto en matemáticas como en nuestro día a día son los mismos, lo único que hacemos es cambiarle un poco los nombres.

Para resolver un problema, la ciencia usa un determinado lenguaje, este es el lenguaje algebraico, es decir, ponemos lo que nos dice el problema en un lenguaje con el que podamos realizar operaciones.

Y la parte de las Matemáticas que estudia este lenguaje, se denomina ÁLGEBRA y es lo que vamos a ver en este tema.

1.1) ¿Qué es el Álgebra?

El Álgebra y sus leyes han sido a menudo fuente de trucos y juegos que, a primera vista, parecen poseer cierto elemento mágico y secreto.

Citando al famoso físico y matemático **Isaac Newton** éste decía en uno de sus libros que "para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema del inglés u otra lengua al idioma algebraico".

Este ha de ser el punto de partida para la resolución de problemas en los que aparecen ecuaciones: comprensión y traducción al lenguaje algebraico.

Cuentan que en la tumba de **Diofanto de Alejandría** (un matemático que vivió en el siglo IV y al que se considera "padre" del álgebra) había una inscripción que explicaba, en forma de problema, la edad que tenía el sabio cuando murió. Decía esto:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto:

es él quien con esta sorprendente distribución

te dice el número de años que vivió.

Su niñez ocupó la sexta parte de su vida,

después,

durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo.

Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y,

cinco años después,

tuvo un precioso niño que,

una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre,

pereció de una muerte desgraciada.

Su padre tuvo que sobrevivirle,

llorándole, durante cuatro años.

De todo esto se deduce su edad."

A ver si eres capaz de deducir la edad que tenía Diofanto cuando murió. Si no eres capaz ahora, vuelve a intentarlo al finalizar el tema, seguro que entonces lo descubrirás. No te quedes con la duda...

En este tema vamos a estudiar las ecuaciones. Las ecuaciones de primer grado, por ejemplo, ya se conocían en la civilización babilónica hacia 1500 años antes de Cristo, pero se resolvían sin utilizar de manera sistemática notaciones algebraicas o simbólicas.

Deberías de conocer las **Expresiones Algebraicas** y las **Ecuaciones de Primer grado**, pero como estos Conceptos previos son imprescindibles para entender los **Sistemas de Ecuaciones** y las **Ecuaciones de Segundo grado**, los vamos a repasar y después veremos del resto del tema.

1.2) Expresiones algebraicas

Se llama **expresión algebraica** a cualquier secuencia de operaciones entre números y letras, donde las letras suelen simbolizar cantidades desconocidas. A estas cantidades desconocidas las llamaremos **variables, incógnitas o indeterminadas.**

Ejemplo: 3xy+5ts+8z

Se llama **valor numérico** de una expresión algebraica al valor que se obtiene al sustituir las variables por un valor numérico determinado.

Ejemplo: Si x= 0; y=1; z=2; t=3; s=4, entonces:

$3xy + 5ts + 8z = 3·0·1 + 5·3·4 + 8·2 = 0 + 60 + 16 = 76$

En una expresión algebraica se llama **parte literal** a la letra o letras con sus exponentes y **coeficiente** al número que multiplica a las letras.

Ejemplo: en la expresión algebraica **$3x^2y$**, la parte literal es **x^2y**, siendo **3** el coeficiente.

Te debes ir familiarizando con el **lenguaje algebraico**, para pasar el enunciado de un problema a una expresión algebraica. Veamos algunos ejemplos muy frecuentes:

Doble de un número: 2x

Triple de un número: 3x

Mitad de un número: x/2

Tercera parte de un número: x/3

Cuadrado de un número: x^2

Cubo de un número: x^3

La suma de dos números consecutivos: x+(x+1)

El cuadrado de la suma de dos números: $(x+y)^2$

La diferencia de los cuadrados de dos números: x^2-y^2

Ejercicio 1

Dada la expresión $5x^2y - 3yz + 4$, hallar su valor numérico para:

a) x=0, y=1 y z= -3 = _______

b) x=-1, y=0, z=1 = _______

c) x=2, y=2, z=1 = _______

1.3) Igualdades: Identidades y ecuaciones

Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es cierta para cualquier valor de las letras que intervienen:

• Ejemplo: $x + 3 = 3x + 9$

Las identidades sirven para transformar expresiones algebraicas en otras más cómodas de manejar.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo es cierta para algunos valores de las incógnitas:

• Ejemplo: $xy + 3y^2 = 5$

Una **ecuación con una incógnita** es una igualdad en la que sólo hay un número desconocido –la incógnita- que se representa por una letra, que normalmente es la **x**, aunque podría ser cualquier otra letra.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

Una **ecuación de primer grado** es una igualdad en la que el exponente de la incógnita es 1.

• Ejemplo de ecuación de primer grado con una incógnita: $2x + 6 = 0$

Una **solución** de la ecuación es un valor de la incógnita para el que la igualdad es cierta:

• En el caso de la ecuación de primer grado anterior, la solución es $x=-3$, ya que $2\cdot(-3) + 6 = -6 + 6 = 0$

Resolver una ecuación es encontrar su solución (o soluciones), o llegar a la conclusión de que no tiene.

Se denomina **primer miembro**, a la expresión algebraica que está la izquierda del signo igual y **segundo miembro**, a la expresión algebraica que está a la derecha del signo igual.

• Ejemplo: en la ecuación $2x + 3 = 9$, el primer miembro es $2x + 3$ y el segundo miembro es 9.

Se denomina **término**, a cada uno de los sumandos que hay en la ecuación.

• Ejemplo: En la ecuación anterior hay tres términos 2x, 3 y 9

1.4) Productos notables

- **Cuadrado de la suma de dos números**: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b$

  Ejemplo: $(x+2)^2 = x^2 + 2^2 + 2\cdot x\cdot 2 = x^2 + 4 + 4x = x^2 + 4x + 4$

- **Cuadrado de la resta de dos números:** $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b$

  Ejemplo $(x-2)^2 = x^2 + 2^2 - 2\cdot x\cdot 2 = x^2 + 4 - 4x = x^2 - 4x + 4$

- **Suma por diferencia = diferencia de cuadrados:** $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

  Ejemplo: $(x+2)\cdot(x-2) = x^2-2^2 = x^2-4$

Ejercicio 2

Desarrolla el siguiente producto notable: $(1+\sqrt{2})^2$

Ejercicio 3

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(1 - y)^2$ = ____________________

b) b) $(2x + 3)^2$ = ____________________

c) $(1 - x)(1 + x)$ = ____________________

1.5) Ecuaciones de primer grado

Ya hemos comentado en apartados anteriores lo que es una ecuación de primer grado, toca ahora aprender a resolverla.

Para resolver una ecuación de primer grado, es recomendable seguir una serie de pasos que nos facilitan el proceso y lo vamos a hacer con un ejemplo:

$$\frac{x}{6}-\frac{3x-1}{4}=2x+\frac{33}{8}$$

1º Quitar denominadores: si hay fracciones, se multiplican los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de todos los denominadores. En este caso el m.c.m (6,4,8) = 24

$$24\left(\frac{x}{6}\right)-24\left(\frac{3x-1}{4}\right)=24(2x)+24\left(\frac{33}{8}\right)$$

$4x - 6(3x - 1) = 48x + 99$

2º Eliminar paréntesis: si existieran, operamos teniendo en cuenta la regla de los signos

$4x - 18x +6 = 48x +99$

3º Agrupamos términos semejantes: Se trata de juntar todas las "x" en el primer miembro y todos los números en el segundo. Para ello hacemos lo que comúnmente se conoce como *lo que está sumando, pasa restando o lo que está restando, pasa sumando.*

$4x - 18x - 48x = 99 - 6$

$-62x = 93$

4º Despejamos la incógnita: Para ello hacemos lo que comúnmente se conoce como *lo que está multiplicando pasa dividiendo o lo que está dividiendo pasa multiplicando.*

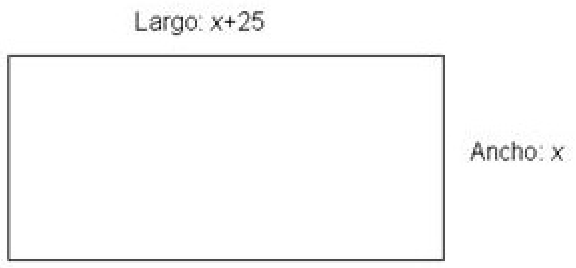
$$x=\frac{93}{-62}=-\frac{3}{2}$$

Veamos cómo aplicamos todo esto a un caso real.

El patio de un colegio mide 25 metros más de largo que de ancho. Si su perímetro es 270, ¿cuál es su longitud y su anchura?

Lo primero que tengo que hacer es leer el problema y entenderlo bien. Luego, plantearlo:

Suele ser muy útil hacer un dibujo con los datos del problema:



Perímetro = 270 metros.

Como no conozco ni el ancho ni el largo, he llamado *x* al ancho, y como el problema me dice que el largo es 25 metros más que el ancho, me queda:

Largo = x+25.

Por otro lado, el perímetro de un rectángulo se calcula sumando la longitud de todos sus lados, luego me queda la siguiente ecuación:

Perímetro = x+(x+25)+x+(x+25) en realidad no hacen falta los paréntesis.

Y, el perímetro es 270 metros.

Por tanto la ecuación que tengo que resolver es: **x+x+25+x+x+25= 270**

Resolución:

Para resolver la ecuación, aplico los pasos antes vistos, así que como no hay ni denominadores ni paréntesis, empiezo por el tercer paso y junto las *x* en el primer miembro y los números en el segundo:

x + x + x + x = 270 - 25 - 25

4x = 220

Y por último despejo la *x*, lo que está multiplicando pasa dividiendo y hago las cuentas:

x = 220/4 = 55

Por lo que la solución de la ecuación de primer grado es:

x= 55

Ya estoy en condiciones de responder a la pregunta del problema:

El ancho del patio de mi colegio es de 55 metro y el largo es de 80 metros (55+25).

Es conveniente comprobar que es cierto:

25 + 80 + 25 + 80 = 270

Por lo tanto el problema está bien resuelto.

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones sencillas de primer grado:

a) $-5x - 1 = -8x + 5$; $x =$ ___

b) $8x - 7 + 3x = 37$; $x =$ ___

c) $1 = - 8x - 80 - x$; $x =$ ___

Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a) $7(x + 1) = - 7$; $x =$

b) $8(-3x - 7) + 6 = - 185 + 3(-x + 3)$; $x =$

Ejercicio 6

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado con paréntesis y denominadores:

$$\frac{-3(-x-2)}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2(6x-5)}{3}+4$$

X = _____

Ejercicio 7

Antonio tiene 5 años, su hermano Roberto 19 y su padre 41. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

____ años

Ejercicio 8

Se han mezclado 60 litros de aceite barato con 20 litros de aceite caro, resultando la mezcla a 1.75 euros/litro. Calcula el precio del litro de cada clase, sabiendo que el de más calidad es 4 veces más caro que el otro.

El barato cuesta a _____ el litro, y el caro a _____ el litro.

2) Sistemas de ecuaciones

2.1) ¿Qué es un sistema de ecuaciones con dos incógnitas?

Frecuentemente, aparecen en los problemas dos cantidades desconocidas sin relación aparente, es decir dos incógnitas. En estos casos, el enunciado del problema se traduce en dos ecuaciones.

Las dos ecuaciones juntas forman un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas**. En un sistema podemos distinguir las incógnitas, cuyos valores debemos calcular, los coeficientes, que son los números que multiplican a las incógnitas, y los términos independientes, que son los números que aparecen sumando, sin multiplicar a ninguna incógnita:

La **solución** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es el conjunto de pares de números para los cuales las dos igualdades se cumplen simultáneamente.

Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es encontrar el conjunto de soluciones del sistema.

A la hora de encontrarnos con un sistema de ecuaciones pueden pasar tres cosas:

- Que el sistema sea **incompatible**; es decir, que no tiene solución.
- Que el sistema sea **compatible indeterminado**; es decir, que tenga infinitas soluciones.
- Que el sistema sea **compatible determinado**; es decir, que tenga una única solución.

Este último caso es el más frecuente y es que vamos a ver en los siguientes apartados.

2.2) Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones

Vamos a transformar un problema real en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir vamos a pasar del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico.

Problema:

Se compran 22 animales entre gallinas y conejos. ¿Cuántos animales se han comprado de cada clase si en total se ha pagado 90 € y el precio de una gallina es 3€ y el de un conejo 5€?

Lo primero que tengo que hacer una vez leído y entendido el problema es plantearlo

Planteamiento:

Total número de animales: 22

Número de gallinas, como no lo conozco, lo llamo: x

Número de conejos, como no lo conozco tampoco, lo llamo: y

Total a pagar: 90 €.

Precio de una gallina: 3 €

Precio de un conejo: 5€

Ya tengo todos los datos que me dan en el problema, veamos como saco las ecuaciones que tengo que resolver.

Lo primero que me dice el problema es que hay 22 animales entre gallinas y conejos, esto no es ni más ni menos que decir: **el número de gallinas más el número de conejos es 22.** Si escribimos lo que está en negrita en lenguaje algebraico obtenemos la primera ecuación:

x + y = 22

Ya que *x* es el número de gallinas e *y* es el número de conejos.

Por otro lado me dicen que pagamos 90€ al final costando cada gallina 3€ y cada conejo 5€; luego lo que pagaré será el número de gallinas que compre por su precio (3€) más el número de conejos que compre por su precio (5€), haciendo un total de 90€. Si escribimos esto en lenguaje algebraico obtenemos la segunda ecuación:

3·x + 5·y = 90

Ya que *x* es el número de gallinas e *y* es el número de conejos.

Si juntamos las dos ecuaciones que hemos obtenido tendremos nuestro sistema de ecuaciones planteado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=22 \\ 3x+5y=90 \end{array}\right\}$$

Una vez planteado el problema, lo que tenemos que hacer es resolver el sistema que hemos obtenido.

A la hora de **resolver un sistema de ecuaciones lo podemos hacer usando tres métodos distintos.** Veamos cada método cómo funciona para conseguir la solución del problema anterior.

2.2.1) Método de sustitución

Este método consiste en:

a. Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones. Preferiblemente aquella cuyo coeficiente sea 1.

b. Sustituir la incógnita despejada por su valor en la otra ecuación.

c. Resolver la ecuación con una incógnita que se ha obtenido.

d. Sustituir la solución de la ecuación con una incógnita en la ecuación obtenida en el paso a.

Vamos a resolver el sistema que teníamos en el planteamiento anterior.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=22 \\ 3x+5y=90 \end{array}\right\}$$

Paso a. Despejo la x en la primera ecuación.

x = 22 - y

Paso b. Sustituyo el valor de la x en la segunda ecuación. Los signos de multiplicar (·) se suelen omitir.

3(22-y) + 5y = 90

Paso c. Resuelvo la ecuación de primer grado que he planteado

$3 \cdot 22-3y+5y = 90$

$66-3y+5y =90$

$-3y+5y = 90-66$

$2y= 24$

$y= 24/2$

$\mathbf{y = 12}$

Paso d. Sustituyo el valor de la variable que he resuelto en la ecuación que tengo despejada:

$x= 22-y$

$x=22-12$

$\mathbf{x=10}$

Por tanto la solución es ***x = 10*** e ***y = 12***.

Una vez resuelto el sistema resuelto el sistema contesto a la pregunta que me hacía el problema:

Se han comprado diez gallinas y doce conejos.

Para terminar compruebo que las soluciones satisfacen las condiciones del problema:

Si compro 10 gallinas a 3€, pago 30€.

Si compro 12 conejos a 5€, pago 60€.

Sumando los dos pago en total 90€.

Luego el problema está bien resuelto.

Ejercicio 9

Resuelve utilizando el método de sustitución los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes:

a) $\left.\begin{array}{r} 8x-y=2 \\ -x+9y=-18 \end{array}\right\}$

x = _______

y= _______

b) $\left.\begin{array}{r} 7x-y=30+4y \\ 2y=15+x \end{array}\right\}$

x = _______

y= _______

2.2.2) Método de igualación

Este método consiste en:

a. Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema.

b. Igualar los resultados obtenidos.

c. Resolver la ecuación con una incógnita que se ha obtenido.

d. Sustituir la solución de la ecuación del apartado c. en cualquiera de las ecuaciones que se han obtenido en el apartado a.

Vamos a resolver el mismo sistema que teníamos en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=22 \\ 3x+5y=90 \end{array}\right\}$$

Paso a. Despejo la x de las dos ecuaciones:

x = 22-y → x = 22-y

3x = 90-5y → x = (90-5y)/3

Paso b. Igualo el valor de la x de las dos ecuaciones:

22-y = (90-5y)/3

Paso c. Resuelvo la ecuación de primer grado que he planteado:

3(22-y) = 90-5y

66-3y = 90-5y

-3y+5y = 90 - 66

2y = 24

y= 24/2

y = 12

Paso d. Sustituyo el valor de la variable que he resuelto en la primera ecuación que tengo despejada:

x = 22-y

x = 22-12

x= 10

Por lo tanto la solución es: **x = 10** e **y = 12**

Una vez resuelto el sistema contesto a la pregunta que me hacía el problema:

Se han comprado diez gallinas y doce conejos.

Para terminar compruebo que las soluciones satisfacen las condiciones del problema:

- Si compro 10 gallinas a 3€, pago 30€.
- Si compro 12 conejos a 5€, pago 60€.
- Sumando los dos pago en total 90€.
- Luego el problema está bien resuelto.

Ejercicio 10

Resuelve utilizando el método de igualación los sistemas siguientes:

a)
$$\left.\begin{aligned}-x&=-30+2y\\ x&=\frac{3y-27}{3}\end{aligned}\right\}$$

x = _______

y= _______

b)
$$\left.\begin{aligned}y&=1-5x\\ -2y&=-2+3x\end{aligned}\right\}$$

x = _______

y= _______

2.2.3) Método de reducción

Este método consiste en hacer desaparecer una de las incógnitas, para ello se realizan los siguientes pasos, *suponiendo que deseamos hacer desaparecer la incógnita* "x".

a) Multiplicar cada una de las ecuaciones por los números necesarios para que el coeficiente de la incógnita "x" sea el mismo en ambas ecuaciones, pero con signo contrario, lo que nos permitirá "reducirla".

b) Sumar miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas tras el apartado a, con lo que desaparecerá la incógnita "x", quedando un ecuación de primer grado con una incógnita.

c) Una vez desaparecida la incógnita "x" resolver la ecuación de una incógnita obtenida.

d) Sustituir en cualquiera de las ecuaciones iniciales el valor de la incógnita obtenido en el apartado c y resolvemos la ecuación con una incógnita obtenida tras esta sustitución.

Vamos a resolver una vez más el mismo sistema que teníamos:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=22\\ 3x+5y&=90\end{aligned}\right\}$$

Paso a. Multiplico la primera ecuación por 3 y la segunda por -1:

$$\left.\begin{aligned}3(x+y=22)\\ -1(3x+5y=90)\end{aligned}\right\}\to \left.\begin{aligned}3x+3y&=66\\ -3x-5y&=-90\end{aligned}\right\}$$

Paso b. Sumo las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 3x+3y = 66 \\ \underline{-3x-5y = -90} \\ 0-2y = -24 \end{array}$$

Paso c. Resuelvo la ecuación obtenida.

-2y = -24

y = -24/-2

y = 12

Paso d. Sustituyo en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y resuelvo la ecuación obtenida.

x+y = 22 → x = 22-y → x = 22-12 → **x = 10**

Por lo tanto la solución es: x= 10 e y= 12

Una vez resuelto el sistema resuelto el sistema contesto a la pregunta que me hacía el problema:

Se han comprado diez gallinas y doce conejos.

Para terminar compruebo que las soluciones satisfacen las condiciones del problema:

- Si compro 10 gallinas a 3 €, pago 30 €.
- Si compro 12 conejos a 5 €, pago 60 €
- Sumando los dos pagos en total 90 €.
- Luego el problema está bien resuelto.

Ejercicio 11

Resuelve utilizando el método de reducción los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes:

a) $$\left.\begin{array}{r} -5x-4y=-46 \\ 3x-3y=-21 \end{array}\right\}$$

x = _______

y= _______

b) $$\left.\begin{array}{r} 10x+2y=-78 \\ -3x-2y=-29 \end{array}\right\}$$

x = _______

y= _______

<u>VAMOS A RESOLVER OTRO SISTEMA DE ECUACIONES POR LOS TRES MÉTODOS</u>

<u>Método de sustitución</u>: $\left.\begin{array}{l}3x+5y=4\\2x+3y=3\end{array}\right\}$

<u>Paso a</u>. Despejamos x en la primera ecuación:

$$3x=4-5y\rightarrow x=\frac{4-5y}{3}$$

<u>Paso b</u>. Sustituyo el valor de la x en la segunda ecuación.

$$2\left(\frac{4-5y}{3}\right)+3y=3$$

<u>Paso c</u>. Resuelvo la ecuación de primer grado que he planteado.

$$\frac{8-10y}{3}+\frac{9y}{3}=\frac{9}{3}\rightarrow 8-10y+9y=9$$

$$-10y+9y=9\rightarrow -y=1\rightarrow y=-1$$

<u>Paso d</u>. Sustituyo el valor de la variable que he resuelto en la ecuación que tengo despejada.

$$x=\frac{4-5y}{3}=\frac{4-5(-1)}{3}=\frac{4+5}{3}=\frac{9}{3}\rightarrow x=3$$

Por lo tanto la solución es: **x = 3** e **y = -1**

<u>Método de igualación</u>: $\left.\begin{array}{l}3x+5y=4\\2x+3y=3\end{array}\right\}$

<u>Paso a</u>. Despejo la **x** de las dos ecuaciones.

$$3x=4-5y\rightarrow x=\frac{4-5y}{3}$$

$$2x=3-3y\rightarrow x=\frac{3-3y}{2}$$

<u>Paso b</u>. Igualo el valor de la **x** de las dos ecuaciones:

$$\frac{4-5y}{3}=\frac{3-3y}{2}$$

<u>Paso c</u>. Resuelvo la ecuación de primer grado que he planteado.

$$2(4-5y)=3(3-3y)\rightarrow 8-10y=9-9y$$

$$-10y+9y=9\rightarrow -y=1\rightarrow y=-1$$

<u>Paso d</u>. Sustituyo el valor de la variable que he resuelto en la primera ecuación que tengo despejada:

$$x=\frac{4-5y}{3}=\frac{4-5(-1)}{3}=\frac{4+5}{3}=\frac{9}{3}\rightarrow x=3$$

Por lo tanto la solución es: **x = 3** e **y = -1**

Método de reducción: $\left.\begin{array}{l}3x+5y=4\\2x+3y=3\end{array}\right\}$

Paso a. Multiplico la primera ecuación por 3 y la segunda por -5, para poder eliminar la "y".

$$\left.\begin{array}{r}3(3x+5y=4)\\-5(2x+3y=3)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}9x+15y=12\\-10x-15y=-15\end{array}\right\}$$

Paso b. Sumo las dos ecuaciones.

9x+15y= 12

-10x-15y=-15

-x + = -3

Paso c. Resuelvo la ecuación obtenida.

-x = -3

x = 3

Paso d. Sustituyo en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y resuelvo la ecuación obtenida.

3x+5y = 4; 3·3+5y = 4; 9+5y = 4; 5y = 4-9; 5y = -5;

$$y=\frac{-5}{5}$$
$$y=-1$$

Por lo tanto la solución es: **x = 3** e **y = -1**

Como es lógico obtenemos las mismas soluciones con los tres métodos.

Ejercicio 12

Una envasadora de agua vende botellas de 2 y 5 litros. Si ha envasado 5392 litros en 1844 botellas. ¿Cuántas botellas de 2 y 5 litros ha usado?

_____ botellas de 2 litros y ____ botellas de 5 litros.

Ejercicio 13

Un fabricante de televisores obtiene un beneficio de 44 euros por cada televisor que vende y sufre una pérdida de 51 euros por cada televisor defectuoso que debe retirar del mercado. Un día ha fabricado 458 televisores obteniendo unos beneficios de 6092 euros. ¿Cuántos televisores buenos y defectuosos ha fabricado ese día?

_____ televisores buenos y _____ defectuosos.

3) Ecuaciones de segundo grado

3.1) Ecuación completa

Las ecuaciones de segundo grado se obtienen al igualar a cero un polinomio de segundo grado y por lo tanto han de tener la siguiente forma: $\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$, en la que **a**, **b** y **c** son los **coeficientes**, es decir los números que acompañan a $\mathbf{x^2}$, **x** y **el término independiente** (el que no lleva x)

Ejemplo:

en la ecuación $x^2 -2x - 3 = 0$, los valores de los coeficientes son: a = 1, b = -2 y c = -3

Las soluciones de las ecuaciones de segundo grado se obtienen aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ten cuidado con los signos, ya que "-b" quiere decir que hay que cambiarle el signo a "b". Así, en el ejemplo anterior: **-b** = -(-2) = 2

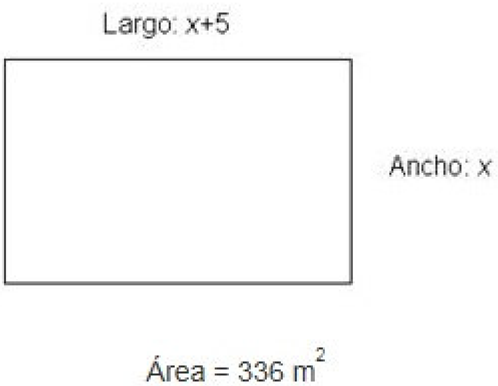
Y lo mismo ocurre con: $\mathbf{b^2} = (-2)^2 = 4$

Y con: **-4ac** = -4·1·(-3) = +12

Veamos un problema en el que aparece este tipo de ecuaciones:

Un rectángulo tiene 5 m más de largo que de ancho, siendo su superficie de 336 m^2. Halla sus dimensiones.

Planteamiento:



Como no conozco ni el ancho ni el largo, he llamado *x* al ancho, y como el problema me dice el largo es cinco metros más que el ancho, me queda:

Largo = *x*+5.

Por otro lado, el área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo por el ancho, luego me queda la siguiente ecuación:

Área = x (x + 5)

Y, el área es 336 m^2

Por tanto la ecuación que tengo que resolver es: x (x+5) = 336

Solución:

Primero copio la ecuación a resolver.

$x\ (x+5) = 336$

Elimino paréntesis:

$x^2 + 5x = 336$

Reescribiendo la ecuación para que quede de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, obtenemos la ecuación:

$x^2 + 5x - 336 = 0$

Donde:

$a = 1$

$b = 5$

$c = -336$

Como hemos comentado antes, estas ecuaciones se resuelven usando la siguiente fórmula.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si sustituimos los valores que tengo de *a, b* y *c* del problema y hacemos cuentas obtenemos:

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm 37}{2} \begin{array}{l} \nearrow x = \frac{-5-37}{2} = \frac{-42}{2} = -21 \Rightarrow x = -21 \\ \searrow x = \frac{-5+37}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad \Rightarrow x = 16 \end{array}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x= 16$ y $x= -21$

Como el problema es de longitudes y éstas no pueden ser negativas, la solución que me interesa es: $x = 16$

Contestando a la pregunta:

Las dimensiones del rectángulo son:

Ancho: 16 metros

Largo: 21 metros (16+5)

Ejercicio 14

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x^2 - 4x - 32 = 0$; x = ______; x = ______

b) $- x^2 - x + 30 = 0$; x = ______; x = ______

3.2) Ecuación incompleta

También **puede ocurrir que la ecuación esté incompleta**, es decir, que falten **b** o **c**, ya que **a** no puede ser cero, para que sea de segundo grado (en este hipotético caso sería una ecuación de primer grado).

3.2.1) Falta b

Veamos un caso en el que falta b (o lo que es lo mismo: b = 0)

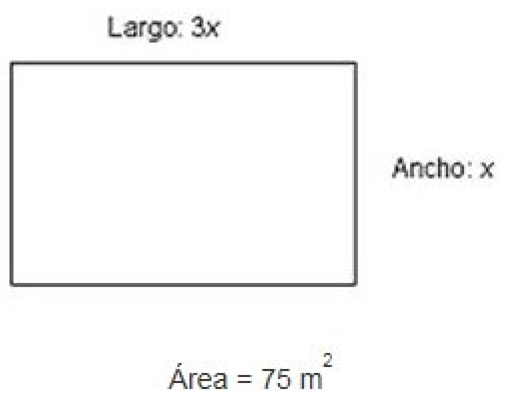
Problema:

Un campo rectangular mide de largo triple que de ancho y su área es 75 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

Como siempre lo primero, una vez leído y entendido el problema, es plantearlo.

Planteamiento:

Como puedo dibujar, dibujo:



Como no conozco ni el ancho ni el largo, he llamado *x* al ancho, y como el problema me dice que el largo es triple que su ancho, me queda que el largo es tres veces el ancho, Largo = 3*x*.

Por otro lado, el área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo por el ancho, luego me queda la siguiente ecuación:

Área = $3x \cdot x$

Y, el área es 75 m^2

Por tanto la ecuación que tengo que resolver es: $3x \cdot x = 75$

Solución:

Primero copio la ecuación a resolver: $3x \cdot x = 75$

La reescribo: $3x^2 = 75$

Es una ecuación del tipo $3x^2 - 75 = 0$ (Ha pasado el 75 al miembro de la izquierda restando).

Es una ecuación de segundo grado en la que:

$a = 3$

$b = 0$

$c = -75$

Aplicando la famosa fórmula, obtenemos dos soluciones: **$x = 5$ y $x= -5$**

Una vez resuelta la ecuación tengo que responder a la pregunta. Dado que el problema es de longitudes y éstas no pueden ser negativas la solución de la ecuación con la que me tengo que quedar es la de $x = 5$. Por tanto:

"Las dimensiones del campo son: Ancho cinco metros y largo quince metros"

Para terminar compruebo que la solución es correcta:

Si tenemos un campo rectangular de cinco metros de ancho por quince de largo y el área de un rectángulo es ancho por largo tenemos que el área es de setenta y cinco metros cuadrados ($5 \cdot 15 = 75$) que era el área que me daba el problema, luego la solución es correcta.

Este tipo de ecuaciones también se pueden resolver despejando x^2 y después haciendo la raíz cuadrada:

$3x^2-75 = 0$

$3x^2 = 75$

$x^2 = 75/3 = 25$

$x = \sqrt{25} = \pm 5$

Con lo que se llega a la misma solución anterior: $x = 5$ y $x= -5$

3.2.2) Falta c

Veamos un caso en el que falta c (o lo que es lo mismo: $c = 0$)

Problema:

Calcula un número tal que si le restamos 5 y el resultado lo elevamos al cuadrado, me dé 25

Planteamiento:

Llamamos al número que me piden *x*.

Número: *x*

Lo primero que me dicen que le haga al número es restarle 5, esto es: $x - 5$

Después me piden que el resultado lo eleve al cuadrado: $(x - 5)^2$

Y por último me dicen que el resultado de lo anterior es 25: $(x - 5)^2 = 25$

Ya tengo la ecuación del problema.

Solución:

Copio la ecuación que tengo que resolver: $(x - 5)^2 = 25$

Si nos damos cuenta, el primer miembro es uno de los productos notables:

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 a \cdot b$

Desarrollamos la ecuación haciendo uso de él: $x^2 + 5^2 - 2 x \cdot 5 = 25$

Haciendo cuentas: $x^2 - 10x + 25 = 25$

Si pasamos el 25 de la izquierda al miembro de la derecha cambiado de signo:

$x^2 - 10x = 25 - 25$

Tenemos la ecuación: $x^2 - 10x = 0$

Es una ecuación de segundo grado en la que:

$a = 1$

$b = -10$

$c = 0$

Aplicando la famosa fórmula, obtenemos dos soluciones: **$x = 0$** y **$x = 10$**

Contestamos a la pregunta:

El número pedido es el cero o el diez.

La comprobación es bastante fácil y la dejo para ti.

Este tipo de ecuaciones también se pueden resolver sacando factor común una *x*:

$x^2 - 10x = 0; x(x-10) = 0$

Cuando tenemos un producto de dos números igualados a cero, sabemos que uno de los dos tiene que ser cero:

$x(x-10) = 0;$

O bien $x=0$ ó $(x-10) = 0$

Y por tanto las dos soluciones son: $x = 0$ y $x = 10$

Que coinciden, lógicamente, con las obtenidas anteriormente.

<u>Ejercicio 15</u>

Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado

a) $4x^2 - 16 = 0;$ x = _____; x = _____

b) $2x^2 - 8x = 0;$ x = _____; x = _____

c) $-6x^2 - 18x = 0;$ x = _____; x = _____

3.3) Número de soluciones

Las ecuaciones de segundo grado pueden tener dos soluciones, una solución o ninguna.

La clave está en el valor que tenga la expresión **b^2-4ac** a la que se le denomina **discriminante** y que es lo que hay dentro de la raíz cuadrada de la fórmula que utilizamos para resolver las ecuaciones de segundo grado.

El número de soluciones depende del signo del discriminante y por tanto pueden darse tres casos:

- **Si el discriminante es positivo**, la ecuación tiene **dos soluciones**. Son los casos vistos anteriormente.
- **Si el discriminante es cero**, la ecuación tiene **una solución.** Ejemplo: $x^2 + 4x + 4 = 0$

En este caso:

a = 1

b = 4

c = 4

y resolviendo la ecuación obtenemos una única solución: x = -2. Compruébalo.

* **Si el discriminante es negativo**, la ecuación **no tiene solución.** Ejemplo: $3x^2 + 3x + 1 = 0$

En este caso:

a = 3

b = 3

c = 1

y resolviendo la ecuación no obtenemos ninguna solución, ya que al aplicar la fórmula, nos encontramos con la raíz de un número negativo, que como sabes no tiene solución real.

Ejercicio 16

La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tienen el padre y el hijo?

El hijo tiene ____ años y el padre ____ años.

Ejercicio 17

Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que si al cuadrado del mayor se le resta el cuadrado de los otros dos, se obtiene el número 12 ¿Cuáles son estos tres números?

Hay ____ soluciones, los números ______________, y los números ______________

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Dada la expresión $5x^2y - 3yz + 4$, hallar su valor numérico para:

a) x=0, y=1 y z= -3 = _**12**___

b) x=-1, y=0, z=1 = __**4**___

c) x=2, y=2, z=1 = _**38**___

Ejercicio 2

Desarrolla el siguiente producto notable: $(1+\sqrt{2})^2$

$$(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$$

Ejercicio 3

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(1 - y)^2$ = 1 + y2 + 2y

b) b) $(2x + 3)^2$ = 4x2 + 12x + 9

c) (1 - x)(1 + x) = 1 - x2

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones sencillas de primer grado:

a) -5x - 1 = -8x + 5; x = **2**

b) 8x - 7 + 3x = 37; x = **4**

c)1 = - 8x - 80 - x; x = **-9**

Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a) 7(x + 1) = - 7; **x = -2**

b) 8(-3x - 7) + 6 = - 185 + 3 (-x + 3); **x = 6**

Ejercicio 6

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado con paréntesis y denominadores:

$$\frac{-3(-x-2)}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2(6x-5)}{3}+4$$

X = 1

Ejercicio 7

Antonio tiene 5 años, su hermano Roberto 19 y su padre 41. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

_17_ años

Ejercicio 8

Se han mezclado 60 litros de aceite barato con 20 litros de aceite caro, resultando la mezcla a 1.75 euros/litro. Calcula el precio del litro de cada clase, sabiendo que el de más calidad es 4 veces más caro que el otro.

El barato cuesta a _1€_ el litro, y el caro a _4€____ el litro.

Ejercicio 9

Resuelve utilizando el método de sustitución los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes:

a) $$\left.\begin{array}{r} 8x-y=2 \\ -x+9y=-18 \end{array}\right\}$$

x = 0

y = -2

b) $$\left.\begin{array}{r} 7x-y=30+4y \\ 2y=15+x \end{array}\right\}$$

x = 15

y = 15

Ejercicio 10

Resuelve utilizando el método de igualación los sistemas siguientes:

a) $$\left.\begin{array}{r} -x=-30+2y \\ x=\dfrac{3y-27}{3} \end{array}\right\}$$

x = 4

y = 13

b) $$\left.\begin{array}{r} y=1-5x \\ -2y=-2+3x \end{array}\right\}$$

x = 0

y = 1

Ejercicio 11

Resuelve utilizando el método de reducción los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes:

a) $\left.\begin{array}{r} -5x-4y=-46 \\ 3x-3y=-21 \end{array}\right\}$

x = 2

y = 9

b) $\left.\begin{array}{r} 10x+2y=-78 \\ -3x-2y=-29 \end{array}\right\}$

x = -7

y = -4

Ejercicio 12

Una envasadora de agua vende botellas de 2 y 5 litros. Si ha envasado 5392 litros en 1844 botellas. ¿Cuántas botellas de 2 y 5 litros ha usado?

1276 botellas de 2 litros y 568 botellas de 5 litros.

Ejercicio 13

Un fabricante de televisores obtiene un beneficio de 44 euros por cada televisor que vende y sufre una pérdida de 51 euros por cada televisor defectuoso que debe retirar del mercado. Un día ha fabricado 458 televisores obteniendo unos beneficios de 6092 euros. ¿Cuántos televisores buenos y defectuosos ha fabricado ese día?

310 televisores buenos y 148 defectuosos.

Ejercicio 14

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x^2 - 4x - 32 = 0$; **x = 8; x = -4**

b) $- x^2 - x + 30 = 0$; **x = -6; x = 5**

Ejercicio 15

Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado

a) $4x^2 -16 = 0$; $x = 4$ $x = -4$

b) $2x^2 - 8x = 0$; $x = 0$ $x = 2$

c) $- 6x^2 - 18x = 0$; $x = 0$ $x = -3$

Ejercicio 16

La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tienen el padre y el hijo?

El hijo tiene **6** años y el padre **36** años.

Ejercicio 17

Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que si al cuadrado del mayor se le resta el cuadrado de los otros dos, se obtiene el número 12 ¿Cuáles son estos tres números?

Hay **dos** soluciones, los números **4, 6 y 8**, y los números **0, 2 y 4**.