

CEPA GUSTAVO ADOLFO BÉCQUER
AMBITO CIENTÍFICO TECNOLÓGICO. 4º ESPAD.

Profesor: Juan Antonio.

EJERCICIOS RESUELTOS – PROBABILIDAD – DIAGRAMA DE ÁRBOL

Los diagramas en árbol constituyen una técnica muy sencilla que permite construir espacios muestrales de experimentos de cierta dificultad, los denominados experimentos compuestos.

Cómo hacer un diagrama de árbol

Realizar un diagrama de árbol se trata de ir dibujando las ramas con los posibles resultados que tenemos en cada caso e ir añadiendo las probabilidades que tenemos con cada resultado.

EJEMPLOS RESUELTOS PASO A PASO:

EJEMPLO 1:

Vamos a resolver unos ejercicios de probabilidad de sucesos compuestos utilizando el diagrama de árbol **(SIN REEMPLAZAMIENTO – LA BOLA QUE SE SACA NO SE VUELVE A METER)**.

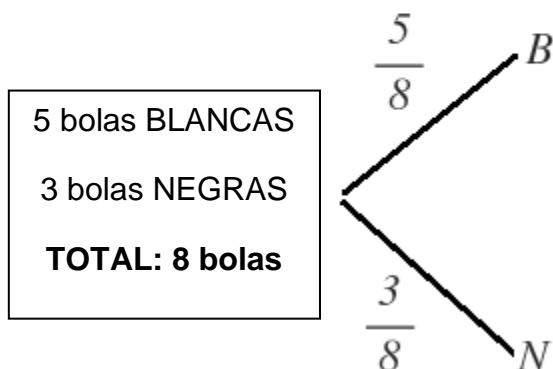
Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se saca una bola al azar de la urna y sin volverla a meter se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color? ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

Empezamos construyendo el diagrama de árbol.

Representamos la primera extracción.

Tengo 8 bolas en total. La probabilidad de sacar una bola blanca es $\frac{5}{8}$, ya que tengo 5 bolas blancas de un total de 8 bolas. La probabilidad de sacar una bola negra es $\frac{3}{8}$, ya que tengo 3 bolas negras de un total de 8 bolas:

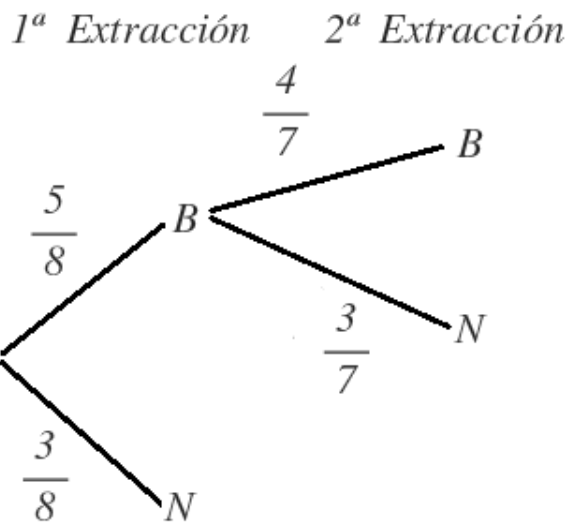
1ª Extracción



Seguimos con la segunda extracción.

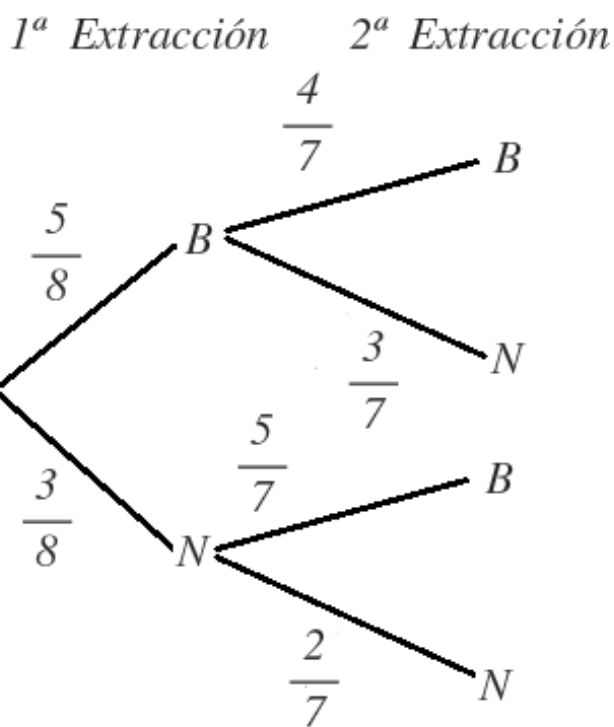
Nos centramos en el camino de haber sacado una bola blanca en la primera extracción. En este caso, nos quedan 7 bolas en total: 4 blancas y 3 negras. Ahora la probabilidad de sacar una bola blanca es por tanto es $\frac{4}{7}$ y la probabilidad de sacar una bola negra es $\frac{3}{7}$:

5 bolas BLANCAS
3 bolas NEGRAS
TOTAL: 8 bolas

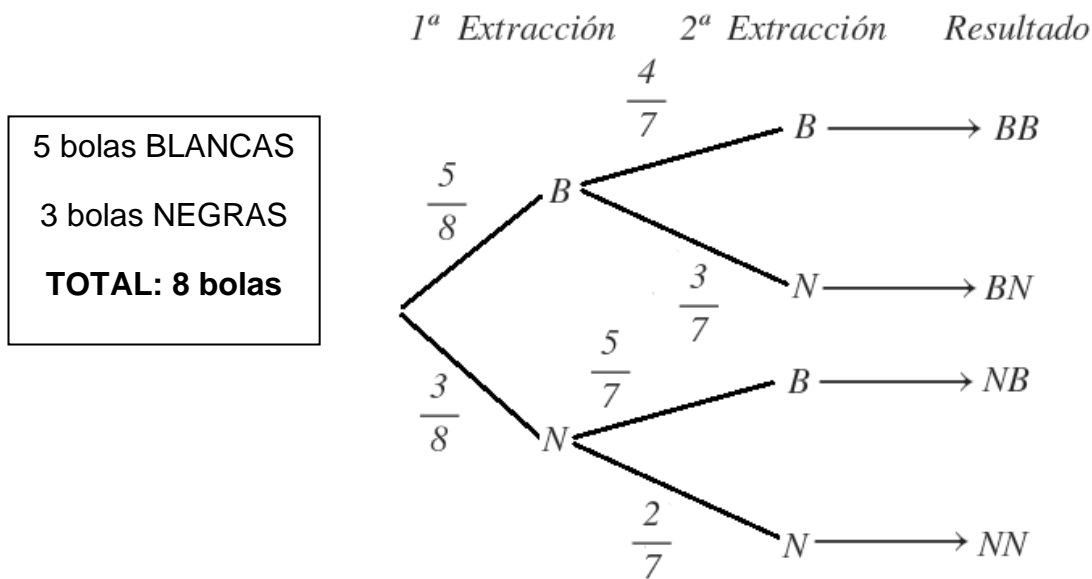


En el caso de haber sacado una bola negra en la primera extracción, nos quedan 7 bolas en total: 5 blancas y 2 negras. Ahora la probabilidad de sacar una bola blanca es por tanto es $\frac{5}{7}$ y la probabilidad de sacar una bola negra es $\frac{2}{7}$:

5 bolas BLANCAS
3 bolas NEGRAS
TOTAL: 8 bolas



Por último, indicamos todos los posibles resultados, siguiendo cada uno de los caminos:



Ahora calculamos las probabilidades de cada resultado:

La probabilidad de sacar dos bolas blancas la obtenemos multiplicando cada una de las fracciones que aparecen en la ramas por las que pasamos (el camino que seguimos desde la caja inicial hasta el resultado obtenido en la combinación de etapas), el $\frac{5}{8}$ de la primera rama y $\frac{4}{7}$ de la segunda rama:

$$P(BB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

La probabilidad de sacar una primero una bola blanca y después una negra la obtenemos multiplicando $\frac{5}{8}$ de la primera rama y $\frac{3}{7}$ de la segunda rama:

$$P(BN) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

La probabilidad de sacar una primero una bola negra y después una blanca la obtenemos multiplicando $\frac{3}{8}$ de la primera rama y $\frac{5}{7}$ de la segunda rama:

$$P(NB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

La probabilidad de sacar dos bolas negras la obtenemos multiplicando $\frac{3}{8}$ de la primera rama y $\frac{2}{7}$ de la segunda rama:

$$P(NN) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

Por tanto, **la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color** será la suma de la probabilidad de sacar dos bolas blancas más la probabilidad de sacar dos bolas negras:

$$P(\text{mismo color})=P(BB)+P(NN)=$$

Sustituimos cada probabilidad por su valor y operamos:

$$= \frac{5}{14} + \frac{3}{28} = \frac{10+3}{28} = \frac{13}{28}$$

La probabilidad de sacar dos bolas de distinto color es igual $P(BN)$ más $P(NB)$:

$$P(\text{distinto color})=P(BN)+P(NB)=$$

Sustituimos cada probabilidad por su valor y operamos:

$$= \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

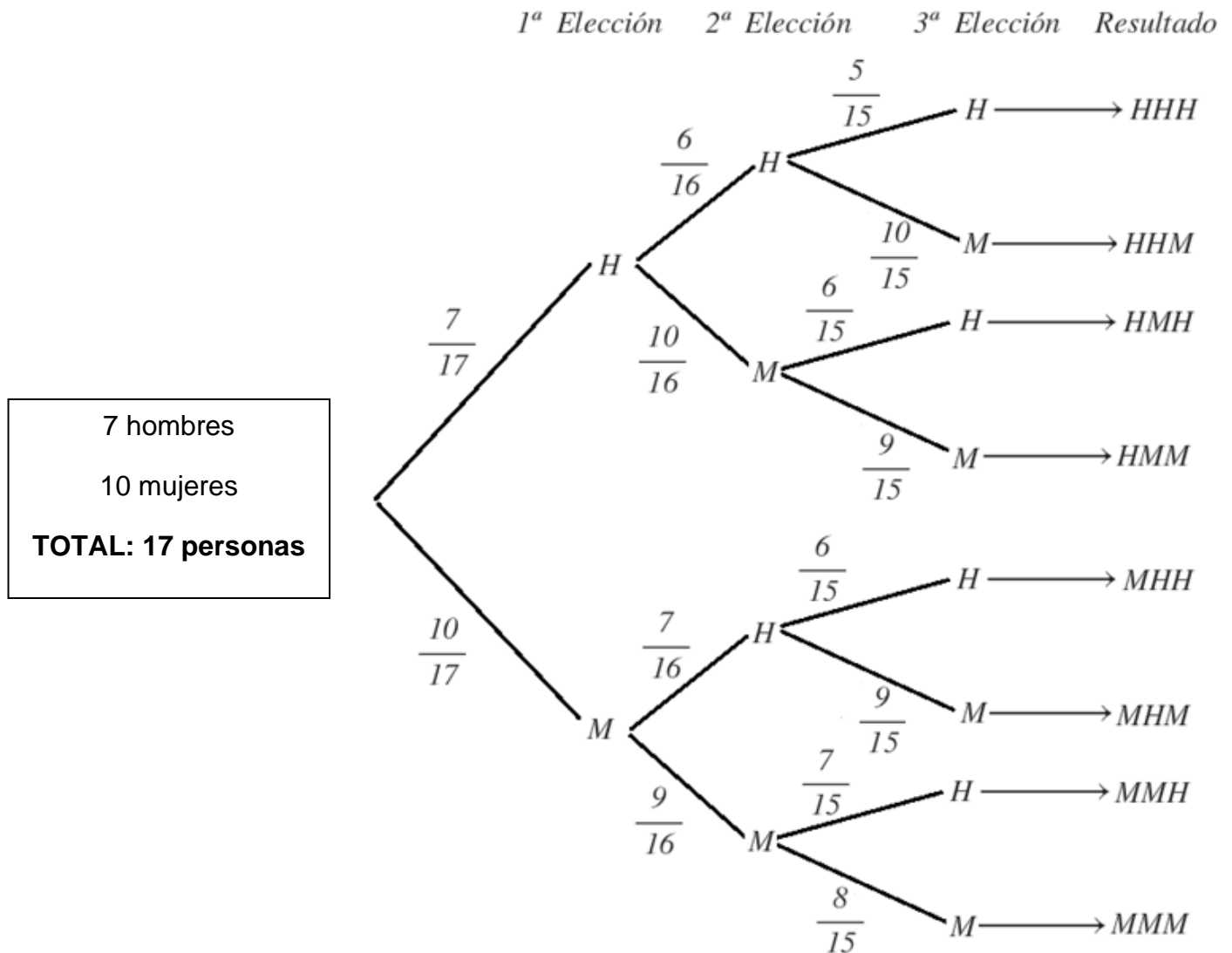
EJEMPLO 2:

En una habitación hay 7 hombres y 10 mujeres. Se eligen 3 personas al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean 3 mujeres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sean 2 hombres y 1 mujer?

En primer lugar dibujamos el diagrama de árbol:



La probabilidad de sacar 3 mujeres es:

$$P(3 \text{ mujeres})=P(MMM)$$

Cuya probabilidad es igual a la multiplicación de las probabilidades del camino:

$$P(MMM)=\frac{10}{17} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{720}{4080} = 0,1764$$

La probabilidad de sacar 2 hombres 1 una mujer será igual a la suma de las probabilidades en cuyo resultado hay 2 hombres y 1 mujer, es decir, HHM, HMH y MHH:

$$P(2 \text{ hombres y } 1 \text{ mujer})=P(HHM)+P(HMH)+P(MHH)$$

Calculamos cada probabilidad multiplicando las probabilidades de cada camino:

$$P(HHM)=\frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} = \frac{420}{4080} = 0,1029$$

$$P(HMH)=\frac{7}{17} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{420}{4080} = 0,1029$$

$$P(MHH)=\frac{10}{17} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{420}{4080} = 0,1029$$

Sustituimos, operamos y nos queda:

$$=0,1029+0,1029+0,1029=0,3087$$

EJEMPLO 3:

Vamos a resolver unos ejercicios de probabilidad de sucesos compuestos utilizando el diagrama de árbol **(CON REEMPLAZAMIENTO – LA BOLA QUE SE SACA SE VUELVE A METER)**

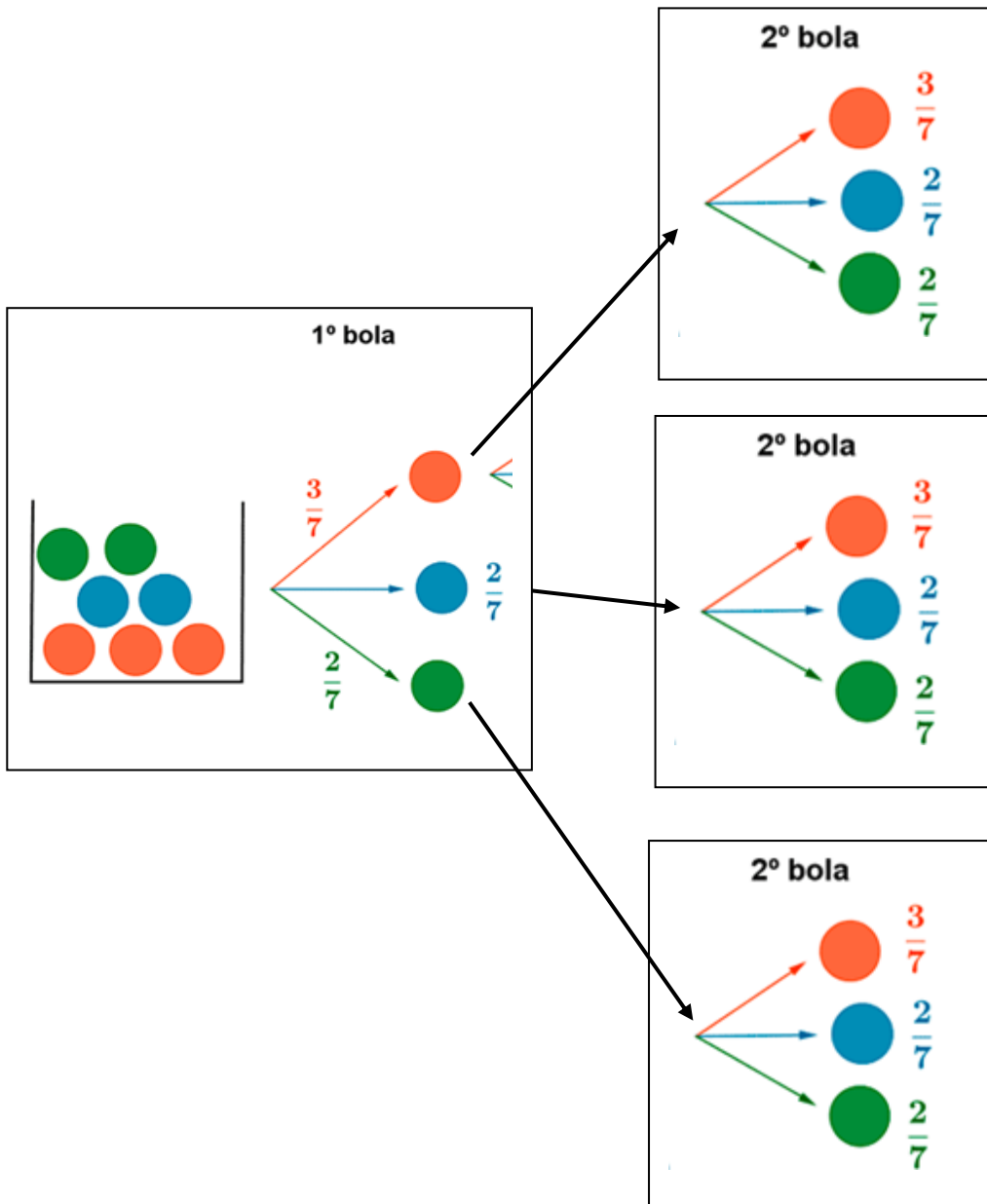
Una urna contiene 2 bolas verdes, 2 bolas azules y 3 rojas.

Se saca una bola al azar de la urna, se mete en la urna y se vuelve a sacar una segunda bola.

¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

Empezamos construyendo el diagrama de árbol. Al ser el experimento con reemplazamiento, la probabilidad de sacar cada una de las bolas es siempre la misma, ya que después de sacada se vuelve a meter la bola en la urna, por tanto volvemos a las condiciones iniciales o de partida, seguimos teniendo el mismo número de bolas iniciales.



Los nueve posibles resultados y la probabilidad que ocurra cada uno de ellos son:

| <u>RESULTADO</u> | <u>PROBABILIDAD</u> |
|-------------------------|---|
| Bola Roja y Bola Roja | $P(\text{roja, roja}) = \frac{3}{7} * \frac{3}{7} = \frac{9}{49} = 0,183$ |
| Bola Roja y Bola Azul | $P(\text{roja, azul}) = \frac{3}{7} * \frac{2}{7} = \frac{6}{49} = 0,122$ |
| Bola Roja y Bola Verde | $P(\text{roja, verde}) = \frac{3}{7} * \frac{2}{7} = \frac{6}{49} = 0,122$ |
| ----- | |
| Bola Azul y Bola Roja | $P(\text{azul, roja}) = \frac{2}{7} * \frac{3}{7} = \frac{6}{49} = 0,122$ |
| Bola Azul y Bola Azul | $P(\text{azul, azul}) = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = 0,081$ |
| Bola Azul y Bola Verde | $P(\text{azul, verde}) = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = 0,081$ |
| ----- | |
| Bola Verde y Bola Roja | $P(\text{verde, roja}) = \frac{2}{7} * \frac{3}{7} = \frac{6}{49} = 0,122$ |
| Bola Verde y Bola Azul | $P(\text{verde, azul}) = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = 0,081$ |
| Bola Verde y Bola Verde | $P(\text{verde, verde}) = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = 0,081$ |

Con todos estos valores de los nueve posibles resultados, puedo calcular la probabilidad de todos los sucesos que se planteen en base a las extracciones que hemos realizado:

¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

Los resultados que cumplen la condición de “sacar dos bolas del mismo color “ son:

Bola Roja y Bola Roja ; Bola Azul y Bola Azul ; Bola Verde y Bola Verde

La probabilidad total, será la suma de las probabilidades de los tres resultados anteriores:

$$P(\text{dos bolas del mismo color}) = P(\text{roja, roja}) + P(\text{azul, azul}) + P(\text{verde, verde}) = 0,183 + 0,081 + 0,081 = 0,345$$

¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

Los resultados que cumplen la condición de “sacar dos bolas de distinto color “ son:

Bola Roja y Bola Azul ; Bola Roja y Bola Verde

Bola Azul y Bola Roja ; Bola Azul y Bola Verde

Bola Verde y Bola Roja ; Bola Verde y Bola Azul

La probabilidad total, será la suma de las probabilidades de los seis resultados anteriores:

$$P(\text{dos bolas de distinto color}) = P(\text{roja, azul}) + P(\text{roja, verde}) + P(\text{azul, roja}) + P(\text{azul, verde}) \\ + P(\text{verde, roja}) + P(\text{verde, azul}) = 0,122 + 0,122 + 0,122 + 0,081 + 0,122 + 0,081 = 0,65$$